2. HOMOGÉNÉISATION ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DE MODULES ÉLASTIQUES DANS ET HORS LE PLAN DES NIDS-D'ABEILLES À PAROIS COURBÉES.

Les propriétés d'un solide cellulaire dépendent non seulement des matériaux le constituant, mais aussi de la géométrie de la cellule. L'objectif de ce chapitre est l'homogénéisation analytique et numérique des propriétés élastiques dans le plan et hors plan d'une nouvelle conception de cellule à parois courbées. Nous explorons la solution basée sur la mécanique des structures pour évaluer les différents modules en fonction des paramètres géométriques et mécaniques. Les travaux antérieurs ont été réalisés pour déterminer les propriétés élastiques équivalentes du nid-d'abeilles hexagonal classique. Cependant, la modélisation analytique de la nouvelle cellule à parois courbées est trop longue et fastidieuse en raison de la complexité géométrique et de la répartition des contraintes dans les parois du nid-d'abeilles, notamment dans les modules de cisaillement hors plan. Cependant, les méthodes énergétiques peuvent être adoptées pour restreindre les modules de cisaillement. L'homogénéisation analytique de type de cellule s'avère très utile et efficace.

2.1 Homogénéisation analytique des constants élastiques dans le plan

Les matériaux cellulaires à faible densité sont principalement utilisés comme des structures sandwich rigides à noyau léger et haute résistance. Les propriétés physiques de ces matériaux dépendent de leur phase constitutive, de la géométrie et de la disposition spatiale du solide [1]. Ce type de structure poreuse a plusieurs applications dans les domaines civils et militaires qui nécessitent à la fois des caractéristiques de rigidité et de légèreté. Un exemple de matériau cellulaire utilisé comme noyau léger est le nid-d'abeilles en papier ondulé [2] qui peut être utilisé comme matériau de base dans des éléments sandwich porteurs. Le problème de la modélisation de structures cellulaires à forte hétérogénéité nécessite une puissance de calcul importante, l'homogénéisation numérique constitue donc un moyen de contourner cette difficulté [3-9].

Le terme auxétique désigne des structures et des matériaux avec des caractéristiques de coefficient de Poisson négatives. Evans et coll. [10] ont été les premiers à utiliser ce terme (du mot (auxetos) c'est-à-dire : peut-être soumis à une augmentation »). Dans la plupart des cas, le coefficient de Poisson des structures cellulaires est positif, c'est-à-dire que le matériau subit une contraction le long de la direction perpendiculaire à l'une des applications de charge.

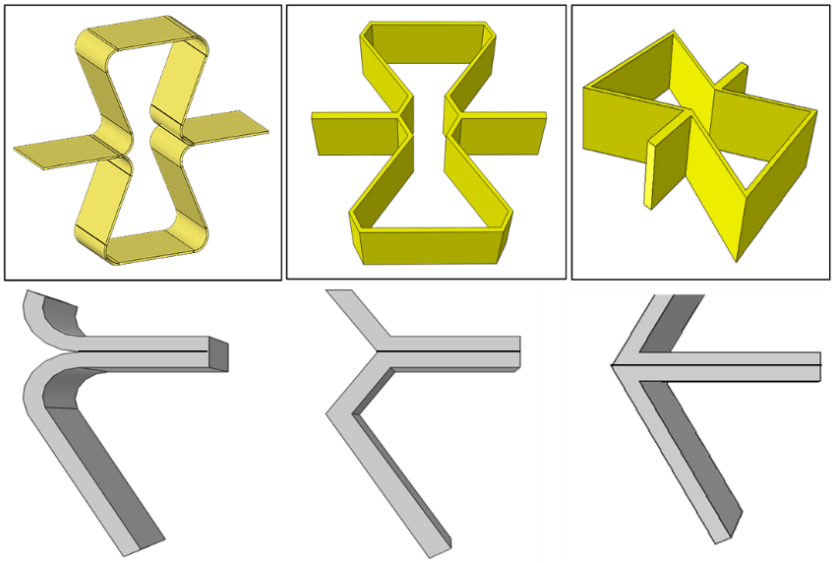
Cependant, une valeur négative du coefficient de Poisson signifie que le matériau se dilaterait latéralement lorsqu'il serait étiré, entrainant une augmentation de son volume [11-13]. Une classe de mousses présentant des coefficients de Poisson négatifs a été fabriquée et présentée pour la première fois par Lakes [14] en 1987. Le premier modèle de structures rentrantes avec un coefficient de Poisson négatif a été introduit en 1985 par Almgren [15]. La structure a d'abord été réalisée en 2D avant d'être étendue en 3D. Ce motif peut être appliqué aux différentes structures telles que des tiges, des charnières et des ressorts, a conduit au développement de structures qui présentent des propriétés élastiques isotropes macroscopiques, bien qu'anisotropes dans leurs détails microscopiques. Lira et coll. [16] ont décrit les propriétés de cisaillement hors plan des configurations en nid-d'abeilles multi rentrantes. Les propriétés transversales de résistance au cisaillement des nids-d'abeilles à coefficient de Poisson nul ont été décrites dans les travaux de Scarpa F. [17]. Le module de cisaillement transversal des nids-d'abeilles avec des coefficients de coefficient de Poisson négatifs dans le plan a été déterminé à l'aide de simulations numériques par les travaux de Nkansah [18]. La mécanique des configurations en nid-d'abeilles rentrantes et symétriques a été décrite à l'aide de divers modèles analytiques, qui ont été essentiellement basés sur l'hypothèse que le comportement des poutres ou nervures individuelles de la cellule peut être décrit par des poutres d'ingénierie élastiques, des ensembles spécifiques de conditions aux limites et différents mécanismes des parois cellulaires (étirement / cisaillement / flexion) [19]. Lorsqu'elles sont chargées dans le plan, les cellules en forme de nid-d'abeilles peuvent être soumises à la flexion ou à l'étirement de leurs parois, ainsi qu'aux rotations des jonctions de connexion (nœuds). Plusieurs chercheurs ont développé des modèles mathématiques basés sur ces mécanismes. Gibson et Ashby [1] et Gibson et coll. [19] ont développé un modèle 2-D en supposant une flexion de type poutre des parois cellulaires. Nkansah et Hutchinson [18] ont cependant montré que les modèles basés uniquement sur la flexion tendent à produire des valeurs de modules élastiques bien supérieures à celles produites par la modélisation moléculaire (affinée). Afin d'améliorer les modèles basés sur la flexion, Gibson et coll. [19]. Masters et Evans [20] ont incorporé les phénomènes d'étirement et de rotation des parois cellulaires. Des études antérieures ont concentré sur le nid-d'abeilles hexagonal régulier utilisé comme un matériau de base pour les panneaux sandwich.

Les propriétés dans le plan sont largement étudiées pour améliorer la connaissance du comportement mécanique des matériaux cellulaires. Les progrès des théories des coques et l'augmentation de la puissance de calcul ont amélioré les modèles déjà décrits par les théories élémentaires. De nombreuses techniques d'homogénéisation numérique ont été proposées pour

modéliser les matériaux par Arabnejad et Pasini [21]. Un examen complet des méthodes d'homogénéisation appliquées aux structures en nid-d'abeilles a été présenté dans l'article de C. Lira [22], sans l'effet de la courbure des parois aux jonctions.

La disponibilité de techniques de fabrication plus rapides et plus sophistiquées a poussé l'élaboration de nouvelles géométries de cellules pour répondre aux besoins des utilisateurs technologiques. Les travaux de Harkati et coll. [4] et Balawi et Abot [23] ont proposé un modèle analytique général pour prédire les modules élastiques appliqués à une cellule hexagonale à parois courbes. Le modèle a permis de paramétrer le module élastique et la densité relative en fonction du rayon de courbure et d'autres caractéristiques de géométrie cellulaire. Le modèle prend en compte les effets de flexion, de cisaillement et de déformations axiales des nervures des cellules le long des deux directions principales du plan, et confirme notamment que la courbure des parois n'a pas le même effet dans chaque direction. Malek et Gibson [24] ont étudié le comportement élastique des nids-d'abeilles hexagonaux périodiques sur une large gamme de densités relatives et de géométries cellulaires en prenant en compte les nœuds à l'intersection des éléments verticaux et inclinés.

Cette partie propose un modèle analytique raffiné capable d'évaluer l'effet de la courbure de la paroi cellulaire et de l'angle interne des cellules sur le comportement mécanique dans le plan des cellules en nid-d'abeilles défini par cinq modules élastiques homogénéisés, en tenant compte de différents types de mécanismes de déformation dans le plan.



(a) (b) (c)

Fig. 2.1 Architecture des cellules en nid- d'abeilles

a): Cellules a parois courbées b): Cellule avec talon [4]. c): Hexagonale Classique.

La figure 2.1 (a) présente la configuration aux parois courbées, proposée et étudiée dans ce travail. La figure 2.1 (b) une cellule avec talon rentrante déjà traitée par les travaux [2-5], la figure 2.1 (c) est la structure en nid-d'abeilles de base [1].

Ce travail est basé, sur les méthodologies présentées dans les références [3-6]. Les principales nouveautés introduites ici consistent à la détermination des modules élastiques d'une nouvelle topologie en nid-d'abeilles par le développement d'un modèle raffiné utilisant une approche analytique basée sur les théorèmes énergétiques et validés ensuite par une modélisation numérique.

2.1.1 Modèle analytique raffiné

Nous présentons un modèle analytique basé sur le mécanisme utilisé par Gibson [1] et le théorème énergétique de Castigliano, pour déterminer les cinq modules de rigidité dans le plan, de la configuration de cellule à paroi courbée. En tenant compte des divers mécanismes de déformation dans les parois.

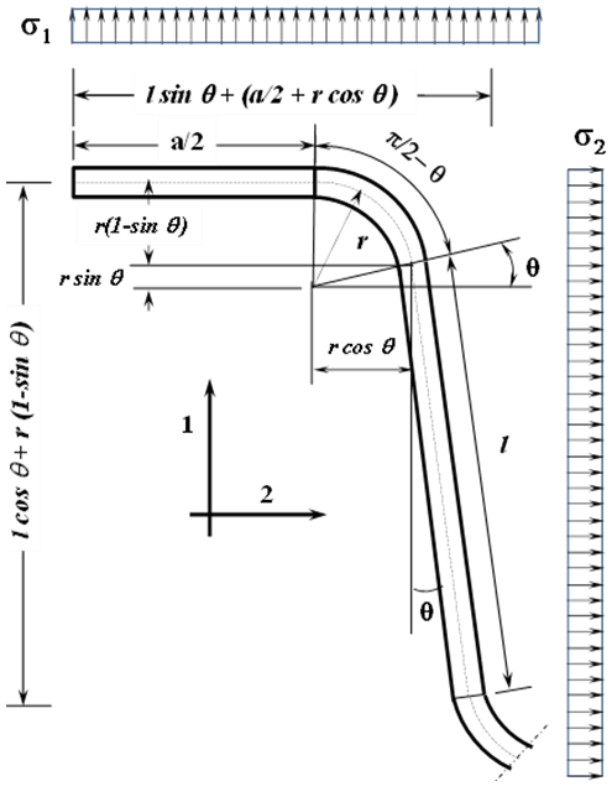


Fig. 2.2 Géométrie et sollicitations d'un quart de cellule a paroi courbée

La géométrie de la cellule est également définie par des paramètres non dimensionnels *α, β, γ*

Ou *(α =r/ L, β=a/ L, γ=t/L)*. Ces paramètres doivent satisfaire la condition suivante :

$$\beta > 2\sin\theta + 2\alpha(1-2\cos\theta)$$

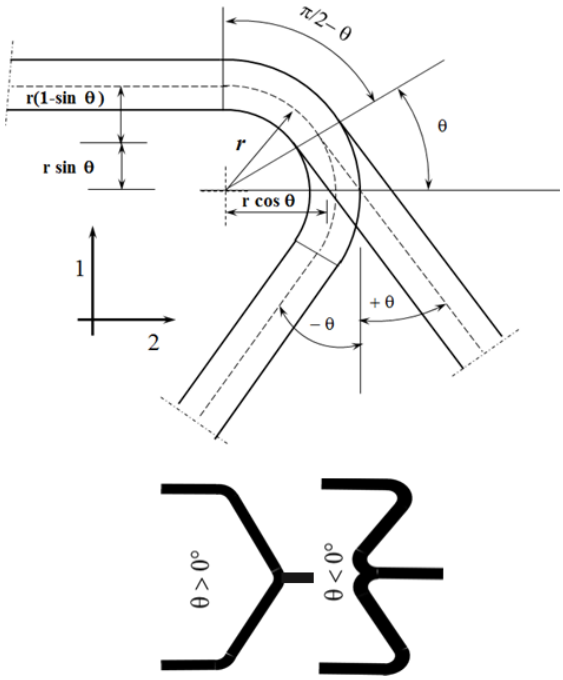


Fig. 2.3 : Détails de la courbure pour les deux configuration (conventionnel et auxétique)

Les propriétés dans le plan (1,2) sont définies par les modules élastiques suivants :

- Les modules E_1 et E_2.
- Le module de cisaillement G_{12}.
- Les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21}.

Pour un solide élastique linéaire, l'énergie de déformation élastique emmagasinée dans l'élément pour l'élasticité 3D est :

$$U = \frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dV \qquad (2.1)$$

L'énergie de déformation élastique dans l'élément poutre en fonction du moment de flexion et l'effort normale et du cisaillement.

$$U = \int_0^l\left(\frac{N^2}{2EA}+\frac{M^2}{2EI}+\frac{T^2}{2GA^*}\right)dx \qquad (2.2)$$

Avec : *N* est la force axiale, *T* est la force de cisaillement et *M :* le moment de flexion interne.

E : le module d'Young du matériau
G : le module de cisaillement
A : la section transversale
A^* :la section réduite,
I :le moment d'inertie de la section
L :la longueur du faisceau.

Selon le théorème de Castigliano : « La projection du déplacement du point d'application d'une force sur la direction de cette force est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force. »

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \tag{2.3}$$

2.1.2 Module d'élasticité E_1 (Direction 1)

Pour un chargement unitaire, la déformation unitaire dans la direction 1 due à la flexion est calculée sous un chargement vertical.
Le déplacement dû à la flexion donné par la formule suivante :

$$u_1^M = \frac{PL^3}{12E_s I}\begin{pmatrix} 6\left(\pi - 2\theta - 8\cos\theta + 6\cos\theta\sin\theta + (2\pi - 4\theta)\cos^2\theta\right)\alpha^3 \\ +12\left(2 - 2\sin\theta - 2\cos^2\theta + (\pi - 2\theta)\cos\theta\sin\theta\right)\alpha^2 \\ +3\left(\pi - 2\theta - (\pi - 2\theta)\cos^2\theta\right)\alpha + \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Avec : $\alpha = \frac{r}{L}; \beta = \frac{a}{L}; \gamma = \frac{t}{L}$.
Les forces normales provoquent une extension dans la paroi de la cellule dans la direction 1 sont calculées par :
Déplacement de la force axiale :

$$u_1^N = \frac{PL}{2E_s A}\left(1 - 2\alpha\theta + \cos 2\theta - \alpha\sin 2\theta + \pi\alpha\right) \tag{2.5}$$

Déplacement de la force de cisaillement :

$$u_1^T = \frac{PL}{2G_s A^*}(1 - 2\alpha\theta - cos2\theta + \alpha sin2\theta + \pi\alpha) \tag{2.6}$$

Le module de cisaillement pour la paroi est égal à :

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \tag{2.7}$$

Où ν_s est le coefficient de Poisson du matériau. Avec :

Pour une section rectangulaire b x t ; $A = bt$; $A^* = \frac{5}{6}bt$; $I = \frac{bt^3}{12}$

Le déplacement total de la cellule dans la direction 1 est donnée par la somme des déplacements axiaux, cisaillement et de flexion

$$u_1 = u_1^M + u_1^N + u_1^T \tag{2.8}$$

Le module d'élasticité équivalent dans la direction 1 est calculé par les relations de l'élasticité en appliquant une contrainte σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{P}{b(a + L\sin\theta + 2r\cos\theta)} \tag{2.9}$$

Où *b* est la hauteur du nid d'abeilles dans la direction hors plan (3) et la déformation ε_1 de la cellule élémentaire est calculée par :

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1}{L\cos\theta + 2r(1-\sin\theta)} \tag{2.10}$$

Le module de Young homogénéisé E_1 sera donc calculé comme le rapport entre la contrainte de traction σ_1 et la déformation ε_1 donnée par les formules (2.9) et (2.10).

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{\cos\theta + 2\alpha(1-\sin\theta)}{\beta + \sin\theta + 2\alpha\cos\theta}\,\frac{1}{\overline{u_1}} \tag{2.11}$$

Avec :

$$\overline{u_1} = \frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{pmatrix} 6\left(\pi - 2\theta - 8\cos\theta + 6\cos\theta\sin\theta + (2\pi - 4\theta)\cos^2\theta\right)\alpha^3 \\ +12\left(2 - 2\sin\theta - 2\cos^2\theta + (\pi - 2\theta)\cos\theta\sin\theta\right)\alpha^2 \\ +3\left(\pi - 2\theta - (\pi - 2\theta)\cos^2\theta\right)\alpha + \sin^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma^2\left(1 - 2\alpha\theta + \cos 2\theta - \alpha\sin 2\theta + \pi\alpha\right) \\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(1 - 2\alpha\theta - \cos 2\theta + \alpha\sin 2\theta + \pi\alpha\right) \end{pmatrix}\right]$$

Pour une cellule régulière $\alpha=\theta$ (équation de Gibson pour nid d'abeilles classique [2])

$$\frac{E_1}{E_s} = \gamma^3\,\frac{\cos\theta}{(\alpha+\sin\theta)\sin^2\theta}\left(\frac{1}{1+\gamma^2(\cot^2\theta+\frac{12}{5}(\nu+1))}\right) \tag{2.12}$$

2.1.3 Module d'élasticité E_2 (Direction 2)

Avec les mêmes hypothèses de la section 1, et pour une charge appliquée dans la direction 2 figure 2.2, en suivant les mêmes étapes que pour E_1, le déplacement dû à la flexion est donné comme suit :

$$u_2{}^M = \frac{PL^3}{12E_sI}\begin{bmatrix} 6\left(2\pi - 4\theta - 3\sin 2\theta - \pi\cos 2\theta + 2\theta\cos 2\theta\right)\alpha^3 \\ +6\left(2\cos 2\theta - \pi\sin 2\theta + 2\theta\sin 2\theta + 2\right)\alpha^2 \\ +\frac{3}{2}\left(\cos 2\theta + 1\right)\left(\pi - 2\theta\right)\alpha \\ +\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Le déplacement axial de la cellule unitaire dans la direction 2 est :

$$u_2^N = \frac{P}{2EA}\left(L - 2r\theta - L\cos 2\theta + r\sin 2\theta + \pi r\right) \tag{2.14}$$

Le déplacement du a l'effet de l'effort de cisaillement est donné par :

$$u_2^T = \frac{P}{2G_s A^*}\left(2L\cos^2\theta - 2r\theta - r\sin 2\theta + \pi r\right) \tag{2.15}$$

Le déplacement total de la cellule dans la direction 2 est la somme des trois contributions est donné par :

$$u_2 = u_2^M + u_2^N + u_2^T \tag{2.16}$$

La contrainte et la déformation dans la deuxième direction sont exprimées par :

$$\sigma_2 = \frac{P}{b(L\cos\theta + 2r(1-\sin\theta))} \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2}{a + L\sin\theta + 2r\cos\theta} \tag{2.18}$$

Le module de Young homogénéisé E_2 sera donc calculé comme le rapport entre la contrainte de traction σ_2 et la déformation ε_2 données par les formules (2.17) et (2.18) :

$$\frac{E_2}{E_s} = \frac{\beta + \sin\theta + 2\alpha\cos\theta}{\cos\theta + 2\alpha(1-\sin\theta)}\frac{1}{\bar{u}_2} \tag{2.19}$$

Avec :

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{bmatrix}\left(12\pi - 24\theta - 18\sin 2\theta - 6\pi\cos 2\theta + 12\theta\cos 2\theta\right)\alpha^3 \\ +\left(12 + 12\cos 2\theta - 6\pi\sin 2\theta + 12\theta\sin 2\theta\right)\alpha^2 \\ +\left(\frac{3}{2}\pi - 3\theta + \frac{3}{2}\pi\cos 2\theta - 3\theta\cos 2\theta\right)\alpha \\ \cos^2\theta\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2\left(1 - 2\alpha\theta - \cos 2\theta + \alpha\sin 2\theta + \pi\alpha + 4\beta\right) \\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(2\cos^2\theta - 2\alpha\theta - \alpha\sin 2\theta + \pi\alpha\right)\end{Bmatrix}\right]$$

Si on prend $\alpha=0$, on peut obtenir le résultat de cellule régulière de Gibson (équation du calcul avancé de Gibson pour nid d'abeilles [2])

$$\frac{E_2}{E_s} = \gamma^3\frac{\alpha + \sin\theta}{\cos^3\theta}\left(\frac{1}{1 + \gamma^2\left(\tan^2\theta + \frac{12}{5}(\nu+1)\right)}\right) \tag{2.20}$$

2.1.4 Les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21}

Les paramètres géométriques doivent satisfaire la condition suivante :

$$a > 2l\sin\theta + 2r\left(1 - 2\cos\theta\right) \tag{2.21}$$

Le coefficient de poisson ν_{12} est le rapport entre les déformations dans les deux directions :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{2.22}$$

Rappelant les définitions des déformations de traction et (2.22), et en utilisant les paramètres adimensionnels, après des simplifications, on obtient :

$$\nu_{12} = -\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\beta+\sin\theta+2\alpha\cos\theta}\,\frac{\bar{u}_{2-1}}{\bar{u}_{1-1}} \tag{2.23}$$

Le déplacement total dans la direction 1 due à un chargement appliqué dans la même direction :

$$\bar{u}_{1-1} = \frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{bmatrix}\left(24\sin\theta-6+18\cos 2\theta-6\pi\sin 2\theta+12\theta\sin 2\theta\right)\alpha^3\\ +\left(12\sin 2\theta-12\cos\theta+6\pi\cos 2\theta-12\theta\cos 2\theta\right)\alpha^2\\ +\left(\frac{3}{2}\pi\sin 2\theta-3\theta\sin 2\theta\right)\alpha\\ +\frac{1}{2}\sin 2\theta\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\end{pmatrix}\right]$$

Le déplacement total dans la direction 2 dû à un chargement appliqué dans la direction 1 :

$$\bar{u}_{2-1} = \frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{bmatrix}6\left(\pi-2\theta-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta+2\pi\cos^2\theta-4\theta\cos^2\theta\right)\alpha^3\\ 12\left(-2\sin\theta-2\cos^2\theta+\pi\cos\theta\sin\theta-2\theta\cos\theta\sin\theta+2\right)\alpha^2\\ \left(3\pi-6\theta-3\pi\cos^2\theta+6\theta\cos^2\theta\right)\alpha+\sin^2\theta\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta+\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta-\cos 2\theta+\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\end{pmatrix}\right]$$

Les coefficients de Poissons dans le plan sont donnés par les formules 2.24 et 2.25.

$$\nu_{12} = -\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\sin\theta+(\beta+2\alpha\cos\theta)}\left(\frac{\begin{Bmatrix}6\alpha^3\left(3\cos 2\theta+4\sin\theta-\pi\sin 2\theta+2\theta\sin 2\theta-1\right)\\ +6\alpha^2\left(2\sin 2\theta-2\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos 2\theta\right)\\ +\frac{3}{2}\alpha\left(\pi-2\theta\right)\left(\sin 2\theta\right)+\frac{1}{2}\sin 2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix}6\alpha^3\left(\left(\pi-2\theta\right)\left(1+2\cos^2\theta\right)-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta\right)\\ +12\alpha^2\left(2\sin^2\theta-2\sin\theta+\left(\pi-2\theta\right)\cos\theta\sin\theta\right)\\ +3\alpha\left(\left(\pi-2\theta\right)\sin^2\theta\right)+\sin^2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta+\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta-\cos 2\theta+\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\end{Bmatrix}}\right) \tag{2.24}$$

$$\nu_{21} = -\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\sin\theta+(\beta+2\alpha\cos\theta)}\left(\frac{\begin{Bmatrix}6\alpha^3\left(\left(\pi-2\theta\right)\left(1+2\cos^2\theta\right)-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta\right)\\ +12\alpha^2\left(2\sin^2\theta-2\sin\theta+\left(\pi-2\theta\right)\cos\theta\sin\theta\right)\\ +3\alpha\left(\left(\pi-2\theta\right)\sin^2\theta\right)+\sin^2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta+\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(1-2\alpha\theta-\cos 2\theta+\alpha\sin 2\theta+\pi\alpha\right)\end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix}6\alpha^3\left(3\cos 2\theta+4\sin\theta-\pi\sin 2\theta+2\theta\sin 2\theta-1\right)\\ +6\alpha^2\left(2\sin 2\theta-2\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos 2\theta\right)\\ +\frac{3}{2}\alpha\left(\pi-2\theta\right)\left(\sin 2\theta\right)+\frac{1}{2}\sin 2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\\ +\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2\left(\alpha+\alpha\cos 2\theta+\sin 2\theta\right)\end{Bmatrix}}\right) \tag{2.25}$$

Si on prend $\alpha = 0$, on peut obtenir le résultat de cellule régulière de Gibson (équation avancée de Gibson pour nid d'abeilles [2])

$$\nu_{12} = -\frac{\cos^2\theta}{\left(\alpha+\sin\theta\right)\sin\theta}\left[\frac{\left[1-\gamma^2+\frac{12}{5}\gamma^2\left(\nu+1\right)\right]}{\left[1+\gamma^2\cot^2\theta+\frac{12}{5}\gamma^2\left(\nu+1\right)\right]}\right] \tag{2.26}$$

2.1.5 Le module de cisaillement dans le plan G_{12}

Le module de cisaillement dans le plan G_{12} est évalué en introduisant les déformations axiales et de cisaillement de la paroi verticale de longueur *a/2*, et oblique de longueur (*a*, *l*) [23]. La flexion dans les éléments se traduit par une rotation du nœud joignant les éléments, et le moment linéaire qui s'annule au mi- portée du tronçon (figure 2.4).

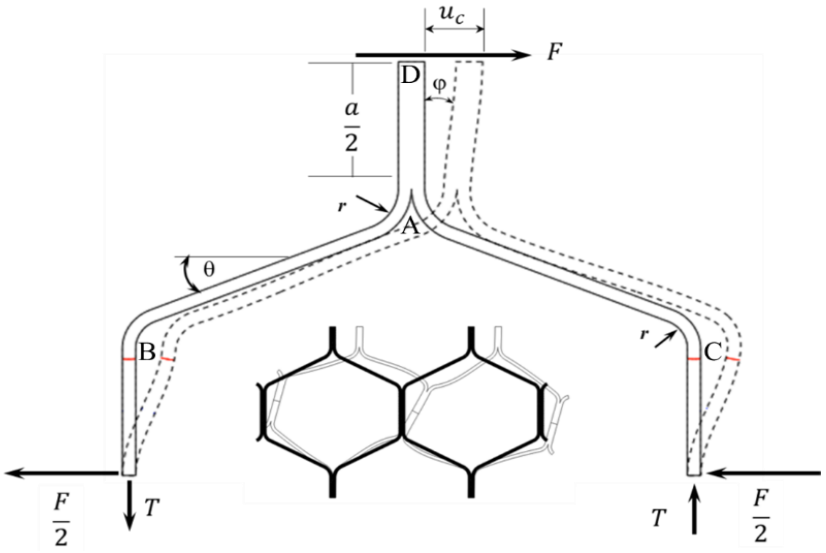


Fig. 2.4 Les sollicitations en cisaillement de la cellule courbée

L'angle de rotation est donné par la formule :

$$\varphi = \frac{1}{24EI}\frac{Fal^3}{\left(l+2r-2r\sin\theta\right)^2}\left[\hat{u}\right] \tag{2.27}$$

Avec :

$$\left[\hat{u}\right] = \begin{bmatrix} 1+(6\pi-12\theta-12\cos\theta-24\sin\theta+6\pi\sin\theta-12\cos^2\theta-12\theta\sin\theta-12\cos\theta\sin\theta+24)\frac{r^3}{l^3} \\ +(18+6\cos\theta-18\sin\theta-3\pi\sin\theta+6\theta\sin\theta)\frac{r^2}{l^2}+(3\pi-6\theta)\frac{r}{l} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

La déflexion horizontale U_c de la paroi verticale présentant la déformation de cisaillement :

$$u_c = \frac{Fa^2}{48EI}\left(\frac{l^3}{\left(l+2r-2r\sin\theta\right)^2}\left[\hat{u}\right]+2a\right) \tag{2.29}$$

La déformation en cisaillement est exprimée par :

$$\gamma = \frac{2u_c}{\left(a+l\sin\theta+2r\cos\theta\right)} = \frac{Fa^2}{24EI\left(a+l\sin\theta+2r\cos\theta\right)}\left(\frac{l^3}{\left(l+2r-2r\sin\theta\right)^2}\left\langle\hat{u}\right\rangle+2a\right) \tag{2.30}$$

Après on calcule la contrainte de cisaillement τ comme suit :

$$\tau = \frac{F}{2b(l\cos\theta + 2r(1-\sin\theta))} \tag{2.31}$$

Après les simplifications et en utilisant les paramètres adimensionnels, on peut obtenir la formule du module de cisaillement qui est le rapport entre la contrainte de cisaillement et la déformation en cisaillement dans le plan :

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} \Rightarrow \frac{G_{12}}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\beta + \sin\theta + 2\alpha\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta + 2\alpha\left(1-\sin\theta\right)\right)\beta^2} \frac{1}{\left(2\beta + \frac{1}{\left(1+2\alpha-2\alpha\sin\theta\right)^2}\left[\hat{u}\right]\right)} \tag{2.32}$$

Avec:

$$\left[\hat{u}\right] = \begin{bmatrix} 1 + (6\pi - 12\theta - 12\cos\theta - 24\sin\theta + 6\pi\sin\theta - 12\cos^2\theta - 12\theta\sin\theta - 12\cos\theta\sin\theta + 24)\frac{r^3}{l^3} \\ +(18 + 6\cos\theta - 18\sin\theta - 3\pi\sin\theta + 6\theta\sin\theta)\frac{r^2}{l^2} + (3\pi - 6\theta)\frac{r}{l} \end{bmatrix}$$

Si on pose $\alpha=0$, on revient au module de cisaillement d'une cellule hexagonale avec la prise des effets axiaux et de cisaillement [1].

$$\frac{G_{12}}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\beta + \sin\theta\right)}{\beta^2\left(2\beta+1\right)\left(\cos\theta\right)} \tag{2.33}$$

Le tableau 2.1 récapitule les expressions analytiques obtenues pour les propriétés élastiques dans le plan du nid-d'abeilles à paroi courbée en fonctions des paramètres adimensionnels.

Tab 2.1 Les modules élastiques dans le plan de la cellule nid-d'abeilles a paroi courbée.

Module	***Formules analytiques***
E1 / Es	$\frac{E_1}{E_s}=\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\beta+\sin\theta+2\alpha\cos\theta}\frac{1}{\frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{Bmatrix}6(\pi-2\theta-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta+(2\pi-4\theta)\cos^2\theta)\alpha^3\\+12(2-2\sin\theta-2\cos^2\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta\sin\theta)\alpha^2\\+3(\pi-2\theta-(\pi-2\theta)\cos^2\theta)\alpha+\sin^2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2(1-2\alpha\theta+\cos2\theta-\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(1-2\alpha\theta-\cos2\theta+\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\end{Bmatrix}\right]}$
E2 / Es	$\frac{E_2}{E_s}=\frac{\beta+\sin\theta+2\alpha\cos\theta}{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}\frac{1}{\frac{1}{\gamma^3}\left[\begin{bmatrix}(12\pi-24\theta-18\sin2\theta-6\pi\cos2\theta+12\theta\cos2\theta)\alpha^3\\+(12+12\cos2\theta-6\pi\sin2\theta+12\theta\sin2\theta)\alpha^2\\+(\frac{3}{2}\pi-3\theta+\frac{3}{2}\pi\cos2\theta-3\theta\cos2\theta)\alpha\\\cos^2\theta\end{bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2(1-2\alpha\theta-\cos2\theta+\alpha\sin2\theta+\pi\alpha+4\beta)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(2\cos^2\theta-2\alpha\theta-\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\end{Bmatrix}\right]}$
ν12	$\nu_{12}=-\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\sin\theta+(\beta+2\alpha\cos\theta)}\left(\frac{\begin{Bmatrix}6\alpha^3(3\cos2\theta+4\sin\theta-\pi\sin2\theta+2\theta\sin2\theta-1)\\+6\alpha^2(2\sin2\theta-2\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos2\theta)\\+\frac{3}{2}\alpha(\pi-2\theta)(\sin2\theta)+\frac{1}{2}\sin2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\gamma^2(\alpha+\alpha\cos2\theta+\sin2\theta)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(\alpha+\alpha\cos2\theta+\sin2\theta)\end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix}6\alpha^3((\pi-2\theta)(1+2\cos^2\theta)-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta)\\+12\alpha^2(2\sin^2\theta-2\sin\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta\sin\theta)\\+3\alpha((\pi-2\theta)\sin^2\theta)+\sin^2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2(1-2\alpha\theta+\cos2\theta-\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(1-2\alpha\theta-\cos2\theta+\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\end{Bmatrix}}\right)$
ν21	$\nu_{21}=-\frac{\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta)}{\sin\theta+(\beta+2\alpha\cos\theta)}\left(\frac{\begin{Bmatrix}6\alpha^3((\pi-2\theta)(1+2\cos^2\theta)-8\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta)\\+12\alpha^2(2\sin^2\theta-2\sin\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta\sin\theta)\\+3\alpha((\pi-2\theta)\sin^2\theta)+\sin^2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma^2(1-2\alpha\theta+\cos2\theta-\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(1-2\alpha\theta-\cos2\theta+\alpha\sin2\theta+\pi\alpha)\end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix}6\alpha^3(3\cos2\theta+4\sin\theta-\pi\sin2\theta+2\theta\sin2\theta-1)\\+6\alpha^2(2\sin2\theta-2\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos2\theta)\\+\frac{3}{2}\alpha(\pi-2\theta)(\sin2\theta)+\frac{1}{2}\sin2\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\gamma^2(\alpha+\alpha\cos2\theta+\sin2\theta)\\+\frac{6(1+\nu)}{5}\gamma^2(\alpha+\alpha\cos2\theta+\sin2\theta)\end{Bmatrix}}\right)$
G12 / Gs	$\frac{G_{12}}{E_s}=\left(\frac{t}{l}\right)^3\frac{(\beta+\sin\theta+2\alpha\cos\theta)}{(\cos\theta+2\alpha(1-\sin\theta))\beta^2}\left[\frac{1}{\left(2\beta+\frac{1}{(1+2\alpha-2\alpha\sin\theta)^2}\left\langle\begin{bmatrix}1+(6\pi-12\theta-12\cos\theta-24\sin\theta+6\pi\sin\theta-12\cos^2\theta-12\theta\sin\theta-12\cos\theta\sin\theta+24)\frac{r^3}{l^3}\\+(18+6\cos\theta-18\sin\theta-3\pi\sin\theta+6\theta\sin\theta)\frac{r^2}{l^2}+(3\pi-6\theta)\frac{r}{l}\end{bmatrix}\right\rangle\right)}\right]$

2.1.6 Modélisation par éléments finis

Afin de valider les résultats trouvés par l'approche analytique, des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis ont été développés en utilisant le code commercial ABAQUS [25]. Les modèles développés sont basés sur des études et des simulations effectuées par plusieurs auteurs [1-6, 16, 26, 27]. Plusieurs tests de convergence ont été réalisés sur deux modèles maillés par deux types d'éléments (poutre et coque). Le premier modèle contenant 53 cellules maillées avec 8304 éléments de poutre quadratiques (B22). Le second modèle comportant 68 cellules maillées avec 69904 éléments de coques S4R avec 4 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Les deux sont utilisés pour simuler les cinq constantes élastiques.

La simulation d'un déplacement unitaire appliqué dans la direction 1 est utilisée pour évaluer le module élastique E_1 et le coefficient de Poisson ν_{12} (figure 2.5.a). L'application d'un déplacement unitaire appliqué de la direction 2 permet de prédire le module élastique E_2 et le coefficient de Poisson ν_{21} (figure 2.5.b). Pour évaluer le module de cisaillement dans le plan, on applique un déplacement unitaire sur un côté du volume élémentaire représentatif dans le plan (1, 2) suivant la direction 2, tandis que le côté opposé est fixe. La symétrie a été prise en compte lors de l'examen des conditions aux limites (figure 2.5. c).

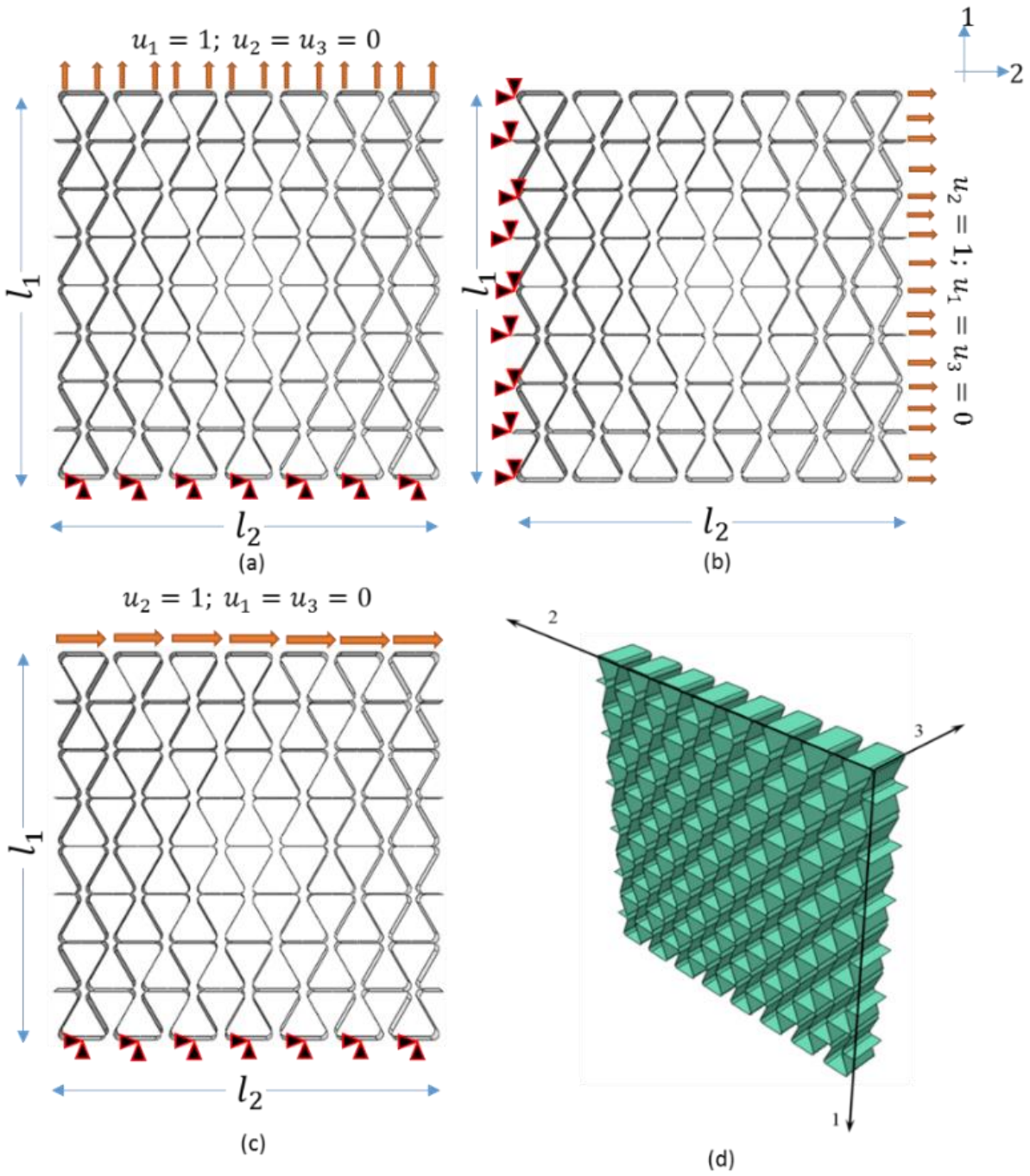


Fig. 2.5 Modèles numériques.

(**a**) et (**b**) Conditions aux limites prises dans la simulation de la traction respectivement dans les directions 1 et 2.

(**c**) Condition limite prise pour déterminer G_{12}.

(**d**) Volume élémentaire représentatif utilisé dans la simulation V.E.R

2.1.7 Résultats et discussions des modules relatifs dans le plan

2.1.7.1 Effet de la courbure sur les modules unis axiaux E_1 et E_2

La variation du module d'élasticité relatif (E_1 / E_S) en fonction de l'angle interne de la cellule θ pour différentes valeurs du rapport du rayon de courbure de paroi $\alpha = r / l =$ (0, 0,1, 0,2 à 0,6) est représenté dans la figure 2.6. Dans ce cas, les paramètres géométriques non dimensionnels $\beta = a / l$ et $\gamma = t / l$ sont fixes et égaux à 1 et 0,05 respectivement. Le module non dimensionnel E_1 / E_S diminué avec l'augmentation de α et atteint une valeur maximale pour θ entre -14 et -3 degrés ; ceci est valable pour chaque rapport de courbure de paroi cellulaire considéré. L'augmentation de θ conduit à la diminution de E_1 / E_S jusqu'à une valeur minimale pour chaque configuration en nid-d'abeilles considérée ici, et les valeurs maximales correspondent toutes à des valeurs de θ proches de zéro.

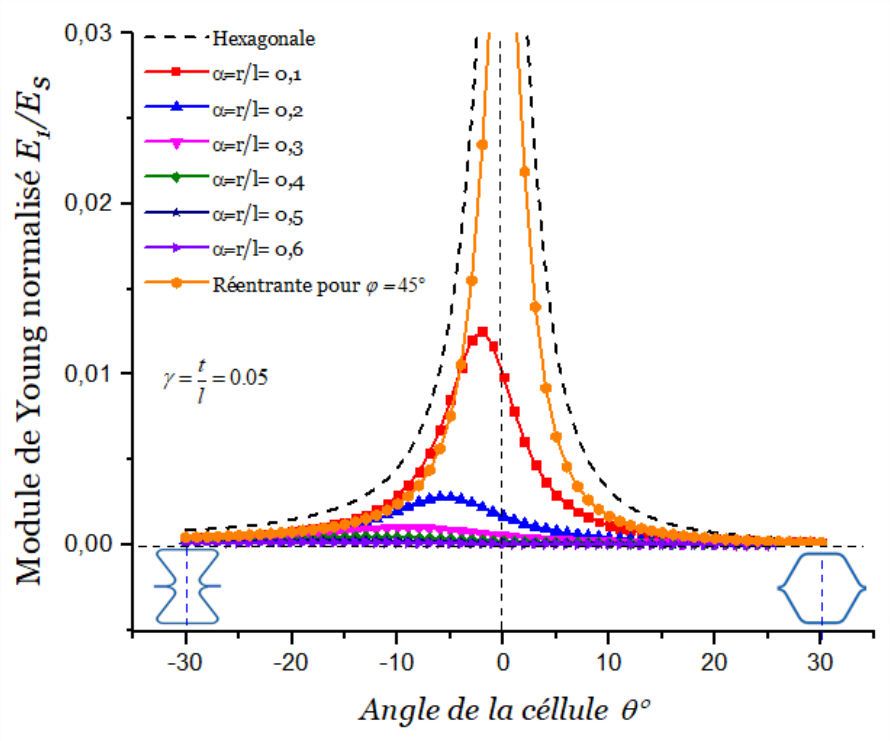


Fig. 2.6 Module élastique normalisé dans la première direction E_1/ Es en fonction de l'angle de cellule pour des différents de rayon de courbure normalisés ($\beta = 1$,$\gamma = 0.05$).

La valeur maximale de E_1/ E_S pour les cellules courbées est généralement située dans la plage négative des angles internes, et elle diminue avec l'augmentation des angles. Des rapports de rayon de courbure varient de $r / l = 0$ à $r / l = 0,6$ étalent la plage des angles internes de la cellule θ, et le comportement auxétique ne se produit que lorsque $\theta >$ -5 degrés. En réduisant r à zéro, on peut obtenir le module de Young dans le plan pour la configuration hexagonale classique.

Pour un rapport de courbure nul, la valeur de E_1/E_S est respectivement 3,33 et 3,72 fois supérieures à α égale à 0,1 et 0,6 pour $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}05$. Cela montre que si le rayon de courbure augmente, les parois cellulaires deviennent de plus en plus flexibles. Les configurations hexagonales en nid-d'abeilles ont un module d'Young (E_1/E_S) très élevé comparées aux autres configurations.

En fixant les paramètres géométriques non dimensionnels (β = 1 et γ = 0,05), la variation du module d'élasticité non dimensionnel (E_2/E_S) pour différent rapport de courbure de paroi en fonction de l'angle interne de la cellule est parabolique (figure 2.7), en particulier pour angles cellulaires positifs internes. E_2/E_S atteint son maximum pour θ égal à 30 degrés dans toutes les cellules en nid-d'abeilles étudiées. Les valeurs les plus élevées sont obtenues pour une courbure nulle ($\alpha=0$). La flexibilité des cellules est proportionnelle au rayon de courbure des parois cellulaires lorsque le nid-d'abeilles est chargé dans la direction 2.

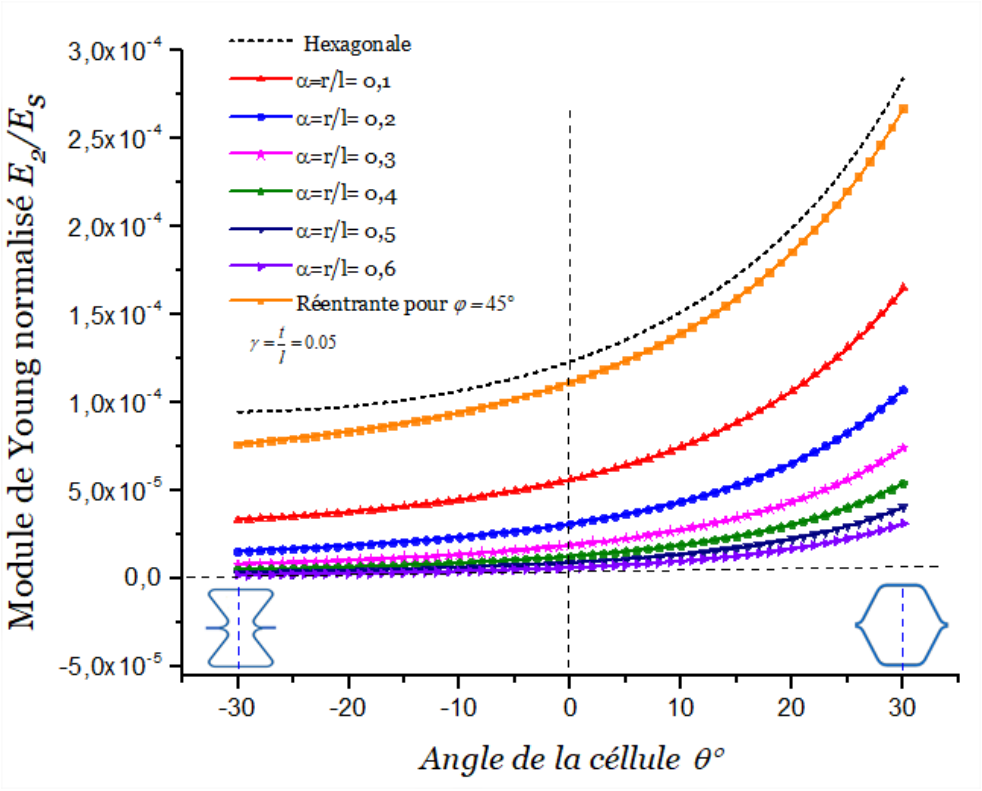


Fig. 2.7 Module élastique normalisé dans la deuxième direction E_2/Es en fonction de l'angle de cellule pour différents rapports de rayon de courbure normalisés ($\beta=1$,$\gamma=0.05$).

2.1.7.2 Effet de la courbure sur les coefficients de Poisson (ν_{12} et ν_{21})

La variation du coefficient de Poisson ν_{12} avec le rapport de courbure α de la paroi cellulaire et l'angle interne θ de la cellule est illustrée dans la figure 2.8. On peut remarquer une diminution de ν_{12} lorsque le rapport de courbure de la paroi augmente. Il est également important de noter que la courbure conduit à une extension du comportement conventionnel de la cellule (c'est-à-dire un coefficient de Poisson positif), même pour des angles internes négatifs. La valeur maximale des coefficients de Poisson (ν_{12}) correspond à une cellule hexagonale régulière ($\alpha=0$), et égale à 9,49 et -10,54 respectivement pour θ égal à 3 et -3 degrés.

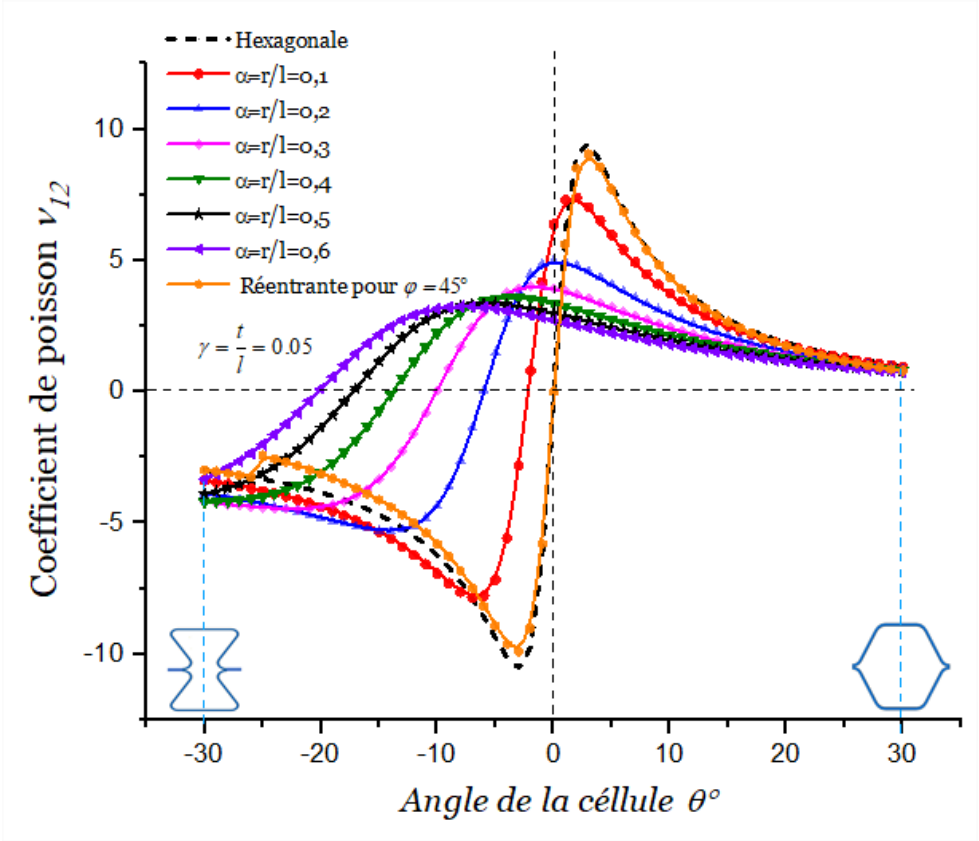


Fig. 2.8 Coefficient de Poisson ν_{12} en fonction de l'angle de cellule pour des différents rayons de courbure normalisés pour ($\beta=1$, $\gamma=0.05$).

La figure 2.9 montre l'évolution du coefficient de Poisson ν_{21} en fonction de l'angle de cellule interne pour différents rapports de courbure α de 0,1 à 0,6, avec un incrément de 0,1. Les valeurs ν_{21} décroit avec l'augmentation du rayon de courbure pour chaque topologie en nid-d'abeilles. Les nids-d'abeilles classiques peuvent avoir un faible coefficient de Poisson négatif pour θ=-30° le ν_{21} est de (-0,33) . Le coefficient de Poisson positif maximum est cependant, égal à

0,96 pour $\theta = 30^{o}$. Il est important de noter que la cellule en nid d'abeille avec des coins courbés présente un coefficient de Poisson négatif en fonction du paramètre α. En effet, pour $\alpha = 0{,}1$ la configuration a un ν_{21} = -0,012 lorsque θ égale à 3° degrés jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum égal à -0,28 pour $\theta = -30$. Pour des courbures importantes $\alpha = 0{,}6$ le ν_{21} =-0,0065 à $\theta = -21^{o}$.

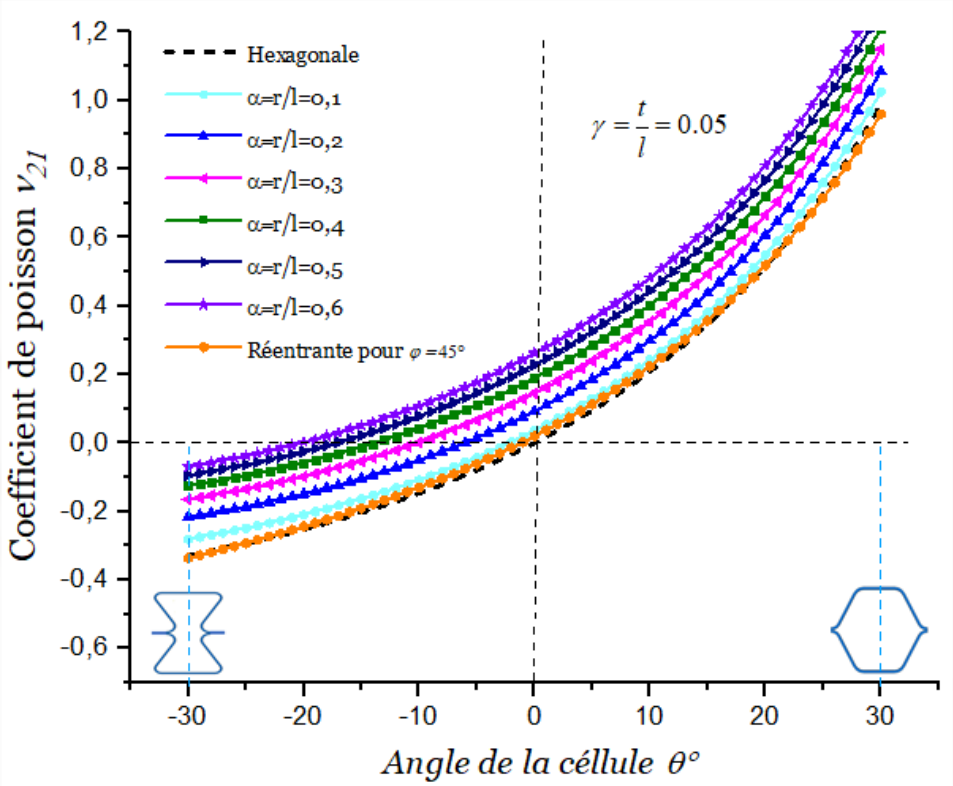


Fig. 2.9 Coefficient de Poisson ν_{21} en fonction de l'angle de cellule pour différents rayons de courbure normalisés pour *(β =1, γ=0.05*).

La variation du coefficient de Poisson ν_{12} pour les angles internes de cellules extrêmes (-30 °, 0 ° et + 30 °), pour des différentes courbures relatives des parois variant de r / l = 0,1 à 0,6 avec un pas de 0,05 est montré sur la figure 2.10. En fixant les paramètres $\beta = a / l$ = 1 et $\gamma = t / l$ = 0,05. La valeur du coefficient de Poisson ν_{12} diminue avec l'augmentation du rayon de courbure α:

Pour $\theta = 0^{o}$ et $\theta = 30°$ les valeurs de ν_{12} déclines de 6,5 à 2,75 et de 0.95 à 0.72 respectivement.

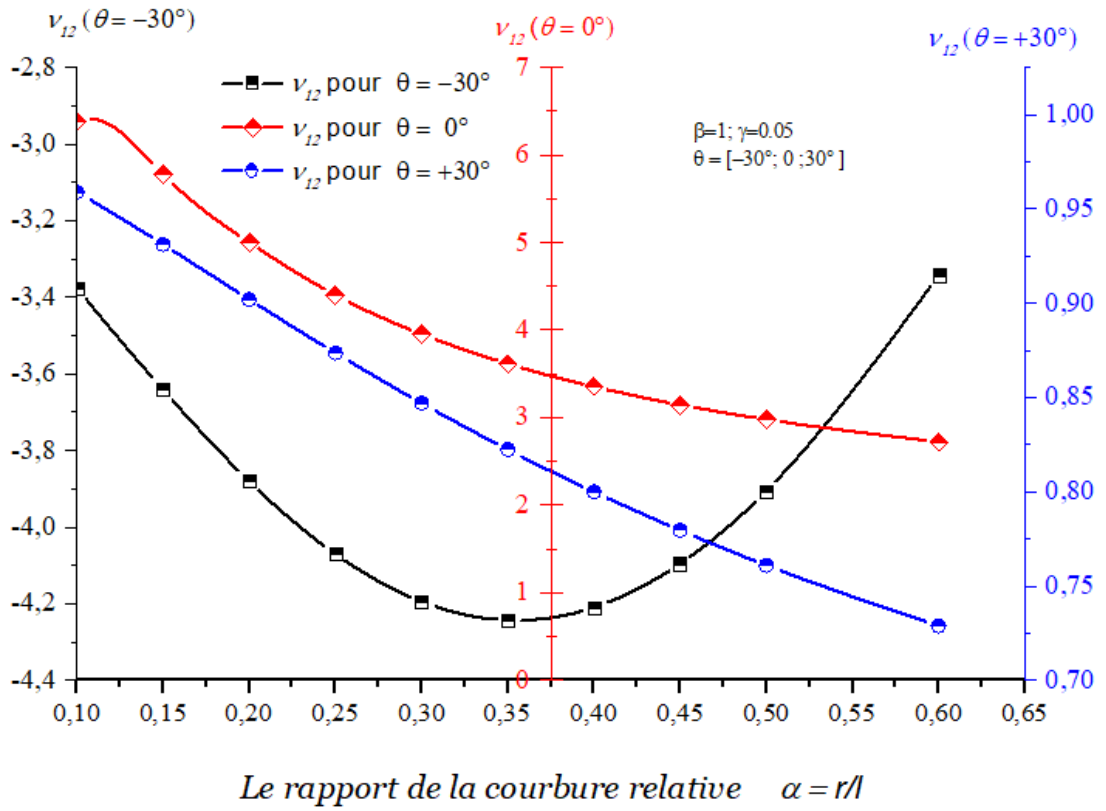


Fig. 2.10 Rapport de coefficient de poisson ν_{12} par rapport au rapport de rayon de courbure $(\alpha = r / l)$ pour les trois configurations « θ égale a −30, 0 et +30 degré »

2.1.7.3 Effet de la courbure sur le module de cisaillement G_{12}

La figure 2.11 représente la variation du module de cisaillement relatif G_{12}/ E_s en fonction de l'angle de cellule pour différents rayons de courbure de paroi α (0,1 à 0,6 avec pas de 0,1) en fixant les paramètres $\beta = a/ l = 1$ et $\gamma = t / l = 0{,}05$. Le module de cisaillement relatif G_{12}/ Es diminué avec l'augmentation du rayon de courbure α qui atteint respectivement les valeurs maximales et minimales aux extrémités pour θ égales à 30 et -30 degrés.

La valeur maximale du module de cisaillement correspond à une cellule hexagonale régulière (α=0). La variation de G_{12} avec la courbure relative de la paroi est parabolique (figure 2.11). Le module de cisaillement réduit de trois fois lorsque la courbure relative passe de 0 à 0,6. Cela peut constituer un inconvénient pour les applications structurelles pour lesquelles un module de cisaillement dans le plan élevé est recommandé. Cependant, il s'agit d'une caractéristique potentiellement utile pour les applications ou une grande flexibilité dans le plan est préconisée telle que les 'morphings skin' [28-29].

De plus, la variation du module de cisaillement dans le plan par rapport aux autres paramètres géométriques, montre que la cellule multi rentrante [3], présente un module de cisaillement plus élevé par rapport aux autres.

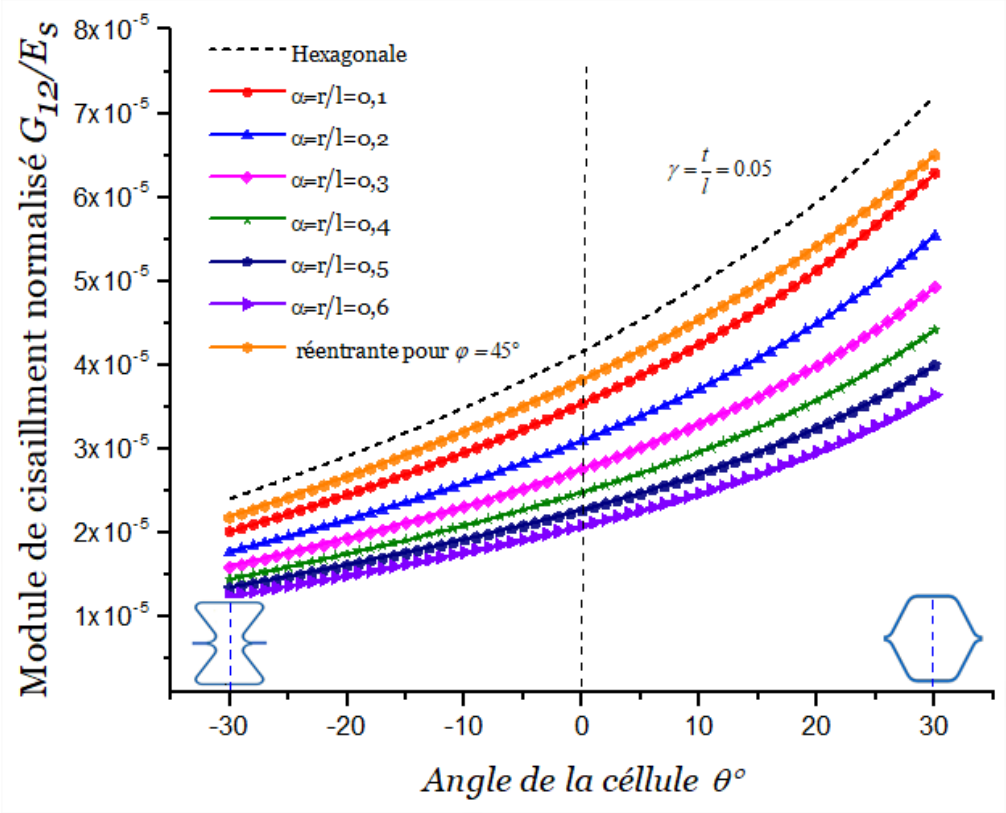


Fig. 2.11 Module de cisaillement normalisé G_{12}/E_s en fonction de l'angle de cellule pour différents rayons de courbure normalisés ($\beta = 1, \gamma = 0.05$).

La variation du module de cisaillement G_{12}/E_s présentée par une surface est montrée en 3D sur la figure 2.12 en fonction des deux paramètres α et θ. On peut remarquer que les valeurs du module de cisaillement de la topologie conventionnelle sont plus grandes de 3 fois que pour la topologie auxétique. La topologie auxétique présente une faible rigidité dans le plan pour courbures relatives importantes. Une valeur maximale du module de cisaillement correspond à un angle de cellule de 30 ° et pour une faible courbure relative r/l = 0.05.

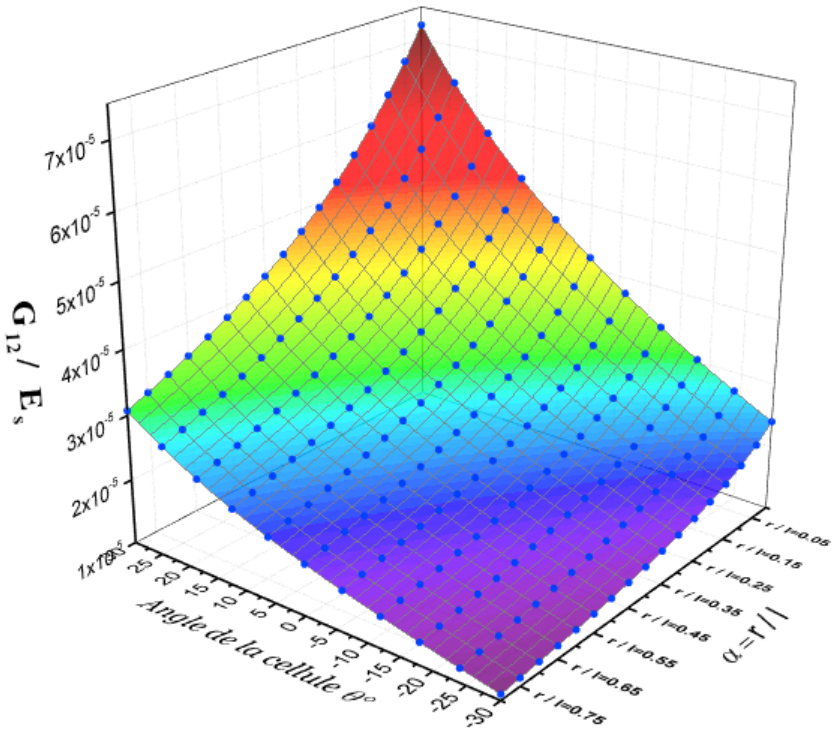


Fig. 2.12 : présentation 3D du module de cisaillement G_{12}/ Es en fonction de l'angle de cellule θ pour différents rayons de courbure normalisés α pour $(\beta=a / l=1, \gamma = t/l =0.05)$.

2.1.7.4 Comparaison entre le modèle analytique et les simulations par éléments finis

Le tableau 2.2 récapitule les résultats analytiques et numériques des constantes élastiques unies axiales (modules de Young et coefficient de Poisson) pour deux valeurs de courbure (r/l= 2/30, r/l=10/30) et pour des différentes topologies de cellules (auxétique et conventionnelle). Les résultats sont tous assez proches, néanmoins les résultats par MEF sont légèrement supérieurs. Il faut noter également que les résultats obtenus par le modèle dans le plan discrétisé par des éléments de poutres sont plus proches de ceux obtenus par l'approche analytique que ceux obtenus à l'aide de l'élément coques (erreur relative de 4,80% pour les éléments de coque et de 4,46% pour éléments de poutres - tableau 2.2). Pour les coefficients de Poissons, l'écart maximal est de 5,24% pour les éléments de coque et de 3,74% pour les poutres.

Pour une analyse dans le plan, le modèle formé par des éléments de poutre avec la prise en compte de l'effet des déformations axiales et de cisaillement est le plus répondu et le plus efficace pour homogénéiser les modules élastiques dans le plan. Cet élément et avec des conditions aux limites soigneusement choisies dans le VER donne des résultats très proches que ceux trouvés analytiquement. L'élément coque donne aussi de bons résultats et permet aussi

de modéliser la hauteur de la cellule (dimension b) qui devient indispensable pour l'évaluation des autres modules hors plan.

Tab. 2.2 Résultats analytiques comparés aux résultats numériques calculés pour E_s=70000 MPa et pour : (a) les modules d'élasticité normalisés (E_1 et E_2) et (b) les coefficients de Poisson (ν_{12} et ν_{21}).

a) les modules d'élasticité normalisé (E_1 et E_2)

		Angle de la cellule	Analytique (Equation. 11, 19)		MEF- (élément Coque 3D)				MEF- (élément poutre 2D)			
			E_1	E_2	E_1	**Erreur**	E_2	**Erreur**	E_1	**Erreur**	E_2	**Erreur**
			1E-4	1E-5	1E-4	%	1E-5	%	1E-4	%	1E-5	%
(a/l= 1 ; t/l =0.05)	r/l= 2/30	-30	4.82	4.56	4.97	3.02	4.75	4.00	4.94	3.11	4.70	2.98
		-15	15.1	5.36	15.7	3.82	5.63	4.80	15.7	3.82	5.60	4.28
		0	205	7.13	211	2.84	7.36	3.13	212	3.30	7.39	3.52
		15	7.82	10.90	8.18	4.40	11.4	4.39	8.12	3.69	11. 3	3.54
		30	1.89	19.5	1.97	4.06	20.4	4.41	1.95	3.08	20.2	3.47
	r/l= 10/30	-30	1.97	0.70	2.04	3.43	0.73	4.11	2.03	2.96	0.72	2.78
		-15	6.46	1.03	6.77	4.58	1.07	3.74	6.76	4.44	1.07	3.74
		0	3.85	1.66	3.99	3.51	1.72	3.49	4.03	4.46	1.73	4.05
		15	1.07	3.05	1.11	3.60	3.19	3.39	1.11	3.60	3.17	3.79
		30	47.3	6.67	49.3	4.06	6.97	4.30	48.7	2.87	6.90	3.33

b) les coefficients de Poisson (ν_{12} et ν_{21}).

		Angle de la cellule	Analytique (Equation. 24, 25)		MEF- (élément Coque 3D)				MEF- (élément poutre 2D)			
			ν_{12}	ν_{21}	ν_{12}	**Erreur %**	ν_{21}	**Erreur %**	ν_{12}	**Erreur %**	ν_{21}	**Erreur %**
(a/l= 1 ; t/l =0.05)	r/l= 2/30	-30	-3.22	-0.30	%	2.84	%	0.65	%	0.71	%	1.30
		-15	-5.20	-0.18	-5.22	0.48	-0.18	1.1	-5.03	3.44	-0.18	2.75
		0	8.27	0.02	8.53	3.05	0.02	5.00	8.00	3.50	0.02	0
		15	2.67	0.36	2.43	8.83	0.37	0.02	2.69	0.37	0.36	2.70
		30	0.98	1.01	0.93	5.37	1.01	0.30	1.30	3.06	1.04	2.65
	r/l= 10/30	-30	-4.26	-0.15	-4.39	3.25	-0.16	3.09	-4.48	5.33	-0.15	0.05
		-15	-2.49	-0.03	-2.43	2.41	-0.04	2.56	-2.67	7.22	-0.04	2.56
		0	3.77	0.16	3.60	5.00	0.16	2.5	3.83	1.56	0.16	1.25
		15	1.80	0.51	1.87	3.23	0.52	2.34	1.87	3.74	0.51	1.17
		30	-3.22	-0.30	-3.31	2.84	-0.31	0.65	-3.24	0.71	-0.31	1.30

Pour le module de cisaillement normalisé G_{12} / E_s. La figure 2.13 montre que l'écart entre les valeurs de la simulation numérique et celles évaluées par l'équation (Eq. 32) est d'environ 4,0%. Cela témoigne la capacité de l'approche analytique pour évaluer les propriétés mécaniques de la structure cellulaire.

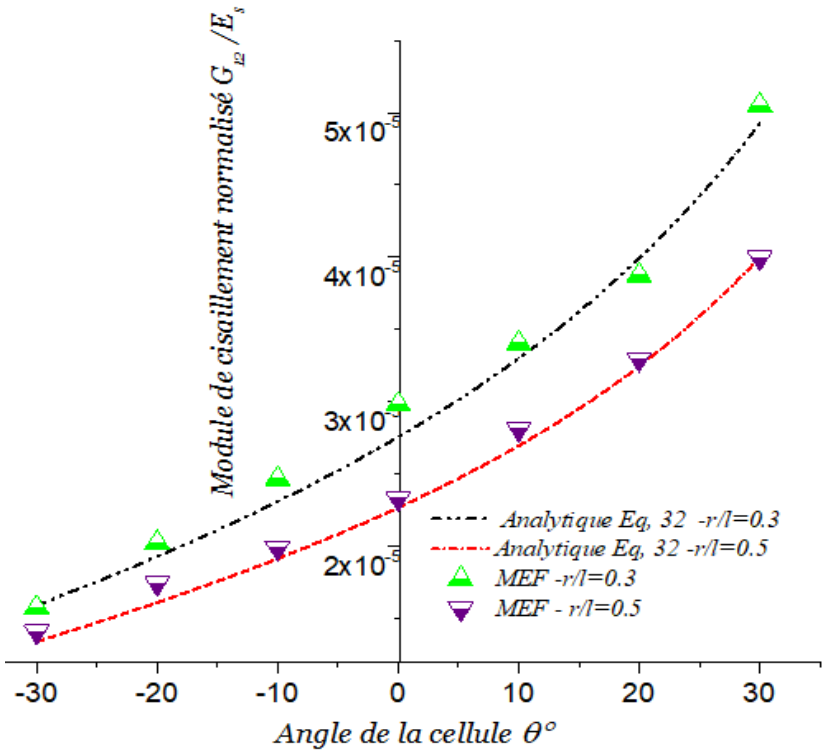


Fig. 2.13 Comparaison des résultats analytiques et numériques du module de cisaillement normalisé G_{12} / Es en fonction de l'angle de la cellule et pour une courbure relative $(\alpha = 0.2)$

2.1.7.5 L'effet de la courbure des parois ($\alpha = r / l$) sur l'anisotropie

L'effet de la courbure sur l'anisotropie du nid-d'abeilles est important, en particulier pour les parois verticales de cellules (θ=0). Pour les valeurs de la courbure relatives allant de 0 à 0.6, une forte chute de l'anisotropie (E_1 / E_2) de 95% est observée pour les cellules à parois verticales (figure 2.14). Également une chute considérable de 80% de l'anisotropie a été observée pour un angle de cellule négatif de -30° pour les mêmes valeurs de la courbure relative. Contrairement aux deux configurations précédentes. Une augmentation de 45% de l'anisotropie est obtenue pour les topologies avec un angle de cellule positif de θ = + 30° quand la courbure relative α passe de 0 à 0,6.

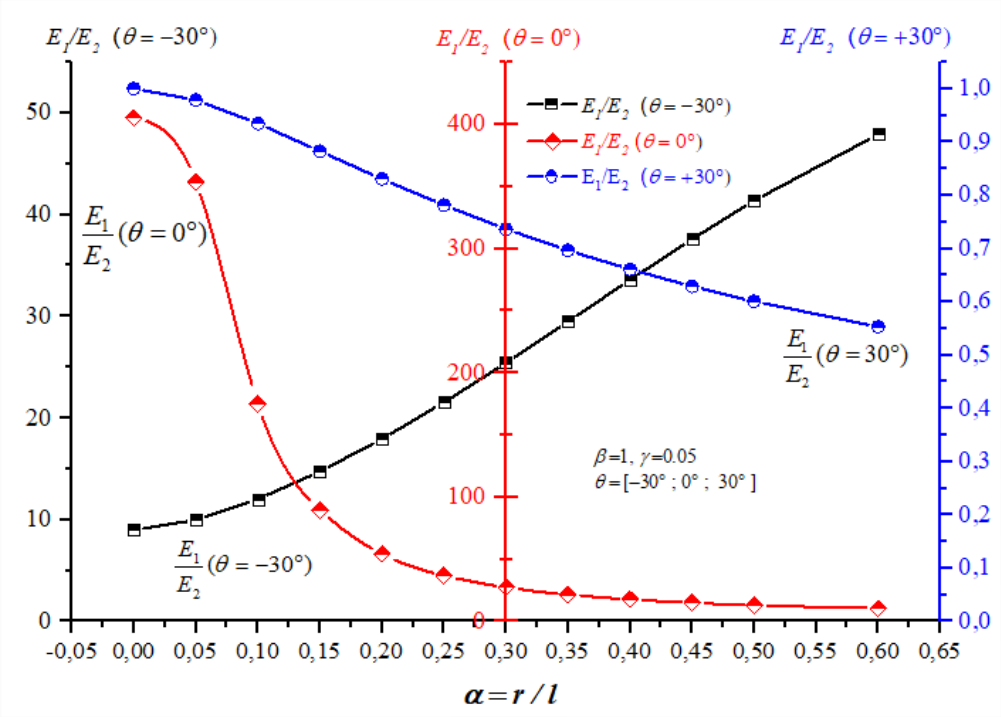


Fig. 2.14 Evolution de l'anisotropie en fonction du rapport de courbure des parois (r / l).

2.1.7.6 Résultats et Remarques

Sur la base des résultats obtenus, on a pu analyser et déterminé les modules élastiques équivalents capables de caractériser un milieu hétérogène dans le plan et comprendre le comportement d'une nouvelle cellule à parois courbées sous l'effet d'une traction biaxiale.

Les résultats trouvés permettent de soulever les conclusions suivantes.

- Les parois courbées ont un effet significatif sur les propriétés élastiques des structures cellulaires.
- Les modules d'élasticité dans le plan E_1, E_2 et G_{12} dans la cellule diminuent avec l'augmentation du rayon de courbure.
- Le comportement devient moins auxétique avec la croissance du rayon de courbure pour les angles internes négatifs.
- Le module de cisaillement diminue avec l'augmentation du rayon de courbure et atteint sa valeur maximale pour l'angle de cellule de + 30 °.
- Le module d'élasticité E_1 est maximum pour un angle interne et un rayon de courbure nulle (cellule à parois verticales).

2.1.8 Conclusions

Les nids-d'abeilles étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles. De plus, la forme des parois et la méthode de mise en œuvre pour évaluer les modules sont des paramètres qui influencent le comportement transversal et longitudinal du noyau. La nécessité d'accroitre la précision et l'efficacité sur l'homogénéisation des modules élastiques a motivé le développement d'un modèle analytique raffiné qui tient compte des différents mécanismes de déformations dans les parois d'une nouvelle topologie en nid-d'abeilles à parois courbées.

L'effet des paramètres géométriques tels que les angles internes et la courbure de la paroi sur le comportement mécanique d'une nouvelle conception de cellule en nid-d'abeilles a été étudié par une approche analytique et numérique. De plus, les propriétés mécaniques de la structure cellulaire ont été évaluées en introduisant les effets de flexion et de cisaillement transversal et des forces axiales. Ces effets sont généralement négligés à cause de leurs faibles contributions dans l'évaluation des modules de la cellule. Les résultats trouvés par le modelé raffiné montrent que l'effet de ces derniers devient significatif pour les cellules épaisses. Il conclut que le comportement de nids-d'abeilles ayant une densité relative élevée ne peut pas être décrit par une paroi soumise uniquement en flexion comme prévu dans les études déjà exposées.

- La présence de courbure permet également de concevoir des configurations avec un coefficient de Poisson positif même pour les angles internes des cellules négatives et rend cette conception en nid-d'abeilles intéressante pour des applications mécaniques spécifiques.
- Les nids-d'abeilles avec un coefficient de Poisson positif dans le plan, le module de cisaillement dans le plan est maximisé, surtout pour des angles de cellule > 20° ceci est particulièrement utile pour les applications structurelles où un module de cisaillement élevé est préconisé.
- Les nids-d'abeilles avec un coefficient de Poisson négatif dans le plan, le module de cisaillement dans le plan est minimisé, la structure devient souple dans le plan, ceci est particulièrement préjudiciable pour les applications structurelles, Cependant, il s'agit d'une caractéristique potentiellement utile pour les applications ou une grande flexibilité dans le plan est préconisée telle que les 'morphings skin**'

***** les avions changeant de forme d'aile, ou de configuration pour maximiser leur performance dans des conditions de vol, de décollage ou d'atterrissage.***

2.2 Homogénéisation analytique des constants élastiques hors plan

2.2.1 Introduction et étude bibliographique

Les nids-d'abeilles sont des structures discrètes qui peuvent être placées comme un noyau entre deux peaux composites minces pour former des structures sandwich et la modélisation de leurs propriétés efficaces est d'une importance primordiale pour prédire leur réponse mécanique globale. La modélisation des constantes d'ingénierie des solides cellulaires en nid-d'abeilles a été élaborée par El-Sayed et al [31], suivie par Gibson et Ashby [1]. Kolpakov a développé en 1985 une approche analytique d'homogénéisation pour décrire les constants élastiques et a été l'un des premiers à introduire le concept de nid d'abeille auxétique (coefficient de Poisson négatif) avec la cellule unitaire en forme de papillon [32]. Présenterait normalement un comportement de coefficient de Poisson positif. Dans leur article, Masters et Evans, en 1996 ont développé des modèles basés sur différents mécanismes de déformation agissant sur les côtes des cellules (flexion, étirement et déformation articulée / cisaillée) [20]. Des modèles analytiques et numériques décrivant les propriétés élastiques unies axiales dans le plan (modules d'Young et coefficient de Poisson) d'une structure en nid-d'abeilles à parois courbes a été étudiée par Harkati et coll. [4]. Les propriétés mécaniques hors plan sont essentielles pour définir les performances mécaniques et l'intégrité structurelle des panneaux sandwich [33]. Des publications de littérature ouverte concernant le cisaillement transversal des configurations en nid-d'abeilles sont disponibles depuis les années 1950. D'autres contributions à l'analyse du cisaillement transverse dans les structures en nid-d'abeilles ont été données par Penzien et Didriksson [34], et plus tard par Ueng et coll. Underwood et Liu [35] ont analysé le cisaillement transverse dans le cas de noyaux formés super plastiquement. Les limites supérieures et inférieures du module de cisaillement transversal sont calculées par des méthodes énergétiques et utilisées par Gibson et Ashby [1]. Une autre méthode pour obtenir deux bornes est proposée par Kelsey et coll. [36]. Les auteurs ont utilisé des expressions simples en appliquant la méthode du déplacement et de la charge unitaire ainsi que des hypothèses simplificatrices concernant respectivement les systèmes de déformation et de contrainte dans le noyau, les résultats trouvés sont validés par des tests de flexion et de cisaillement transversal. Un modèle tridimensionnel représentatif des éléments de volume avec des conditions aux limites périodiques appropriées est proposé par Lin et coll. [37] pour calculer numériquement les propriétés élastiques hors plan des nids-d'abeilles hexagonaux à bords de cellules d'épaisseurs variables et courbes. Les auteurs ont montré que les résultats numériques MEF indiquent que le module de cisaillement hors plan, la résistance à la compression et au flambement au cisaillement des nids-d'abeilles hexagonaux réguliers

sont significativement affectés par la distribution des solides dans les bords des cellules. Les propriétés d'une nouvelle structure en nid-d'abeilles proposée par Bezazi et coll. [5-6] et qui ont été évalués à l'aide d'un modèle analytique et numérique par Lira et coll. [16]. Les modèles analytiques sont validés à l'aide d'une technique d'éléments finis à grande échelle pour simuler des essais de cisaillement transverse, et les différents résultats mettent en évidence le mécanisme de déformation spécifique de la cellule en nid-d'abeilles multi rentrante. Le module d'élasticité dans le plan d'une cellule à parois courbes a été étudié par Balawi et Abot [23] à l'aide de moyens analytiques et numériques et corrélés avec les résultats expérimentaux pour les cellules en nid-d'abeilles en aluminium. Le comportement à l'effondrement sous cisaillement et compression simple hors plan est analysé par Zhang et Ashby [38] qui a conclu qu'il existe un bon accord entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux. Les propriétés de la résistance au cisaillement transversal d'un nouveau nid-d'abeilles avec un coefficient de Poisson zéro (ZPR) sont proposées par Lira et coll. [22] où la configuration cellulaire est simulée par une série de modèles d'éléments finis qui ont été comparés aux résultats expérimentaux des tests de cisaillement en flexion 3 points pour réaliser une étude paramétrique sur les modules de cisaillement dans les deux sens. La rigidité au cisaillement d'une structure en nid-d'abeilles avec ZPR capable d'obtenir des déformations dans deux directions orthogonales est analysée et validée en utilisant des techniques d'éléments finis par Gong et coll. [39]. La raideur transversale hors plan est également évaluée par rapport à l'épaisseur des panneaux à structure alvéolaire. Les modèles théoriques et numériques présentent de bons accords et montrent le potentiel de cette nouvelle configuration centrale ZPR pour les panneaux sandwich. Le module de cisaillement transverse des nids-d'abeilles à coefficient de Poisson négatif dans le plan a été étudié par Scarpa et Tomlin [17] à l'aide de simulations numériques. Les auteurs ont montré que le module de cisaillement transversal réel est une valeur intermédiaire, qui dépend de la densité relative et du rapport d'épaisseur où la différence entre les limites supérieure et inférieure est particulièrement significative pour les valeurs négatives. Des nids-d'abeilles carrés en acier inoxydable ont été fabriqués et calculés analytiquement par Cote et coll. [40] sur la base d'une déformation uniforme des parois cellulaires, ils ont conclu que la résistance au cisaillement des nids-d'abeilles carrés se compare favorablement à celle d'autres topologies de noyau sandwich telle que les noyaux pyramidaux et ondulés.

Grediac [41] a étudié en utilisant la méthode des éléments finis trois géométries de cellules afin d'étudier l'influence de l'épaisseur sur le module de cisaillement et sur l'homogénéité du champ de contraintes de cisaillement. Une relation fournissant le module de cisaillement G_{13} pour les

nids-d'abeilles minces mettant en évidence l'influence de l'épaisseur du noyau. Scarpa et coll. [42] ont proposé une analyse combinée des propriétés mécaniques et électromagnétiques hors plan des nids-d'abeilles auxétiques rentrants. Ils ont effectué des simulations numériques et des expérimentations pour évaluer la relation entre l'anisotropie des propriétés mécaniques transverses (modules de cisaillement et de compression) et le tenseur de permittivité diélectrique des nids-d'abeilles auxétiques.

Des tests numériques basés sur les éléments finis sont effectués sur quatre configurations différentes de nids-d'abeilles chiraux disposés dans un ensemble de cylindres reliés par des ligaments ont été étudiés par Kolla et coll. [43] et des mésos structures chirales optimales sont trouvées pour les propriétés de cisaillement cible. Florence et coll. [44] ont démontré que le calcul de la densité modale des cylindres sandwich en nid d'abeille sans tenir compte de la déformation de cisaillement transverse peut conduire à des erreurs importantes à haute fréquence. Une approche dynamique a été proposée par Schwingshackl et coll. [45] qui permet de déterminer les propriétés hors plan du nid d'abeille. Cette méthode a un bon accord entre les principales propriétés théoriques des matériaux hors plan du nid-d'abeilles et les méthodes expérimentales ASTM. Lorato et coll. [46] ont décrit les propriétés mécaniques élastiques linéaires hors plan des configurations en nid-d'abeilles trichinales, tétra chirales et hexa chirales. Stefan et coll. [47] ont présenté quelques modèles généraux d'éléments finis bidimensionnels et tridimensionnels permettant d'étudier les propriétés mécaniques orthotropes équivalentes des nids d'abeilles. L'influence de la géométrie sur la rigidité de cisaillement transversale équivalente dans une plaque sandwich en nid d'abeille est présentée par Shi et Tong [48]. Les auteurs ont conclu que peu d'influence du rapport entre l'épaisseur du panneau de façade et l'épaisseur de la paroi hexagonale était enregistrée lorsque la profondeur de l'âme était grande par rapport à la taille de la cellule hexagonale.

Les propriétés des nids-d'abeilles dans le plan ont été étudiées par plusieurs chercheurs [49, 1-50, 51-52], tandis que les travaux antérieurs des auteurs [53] et d'autres chercheurs [54] ont supposé que les propriétés dans le plan étaient moins importantes et concentrées sur les propriétés hors plan (direction 3). Parmi les modèles d'homogénéisation existant dans la littérature et qui considèrent les cellules à parois courbes, le modèle développé par Balawi et Abot [23], Meraghni et coll. [55], Sun, YG [56] et Hohe et Becker [57]. La plupart des techniques d'homogénéisation existantes se concentrent sur le nid-d'abeilles hexagonal traditionnel. Divers chercheurs ont créé des modèles qui fournissent des résultats très différents

pour les constants élastiques homogénéisés en nid-d'abeilles hors plan en raison des différentes hypothèses et méthodologies suivies.

Le but de cette partie est d'évaluer numériquement les propriétés des modules de cisaillement hors plan sur la base de l'approche théorique conduisant à déterminer leurs limites supérieures et inférieures de conception de nids-d'abeilles à parois cellulaires courbés. Les principaux intérêts dans cette enquête sont l'évaluation hors plan de cinq modules élastiques homogénéisés qui montre l'effet de paramètres géométriques tels que : l'angle interne θ, la profondeur b et la courbure des parois cellulaires r d'une nouvelle structure en nid d'abeille courbé sur son comportement mécanique. La comparaison entre les modèles analytiques et numériques montre un bon accord et permet de mettre en évidence les mécanismes de déformation spécifiques de la cellule en nid d'abeille à parois courbes précédemment étudiées par les auteurs [4, 50].

2.2.2 Analyse théorique et modèle analytique

Le modèle analytique développé dans cette section est basé sur la méthode de déplacement unitaire et les théorèmes des énergies potentielles et complimentaires minimales, pour la détermination des propriétés élastiques hors plan de la configuration de cellule à paroi courbée. Compte tenu des parois subissant une déformation en flexion seulement.

2.2.2.1 La géométrie des cellules en nid d'abeille

La géométrie de la cellule étudiée présentée dans la figure 2.15 peut être représentée par trois parois de longueurs a, l et r, d'épaisseur t et d'angles internes θ. comme les autres notations utilisées dans la théorie des matériaux cellulaires dans la section 1 [4, 50], et la géométrie de la cellule élémentaire sont également définies par les paramètres non dimensionnels ($\alpha = r / l$, $\beta = a / l$ et $\gamma = t / l$). La cellule actuelle a une forme générale, d'une certaine manière, elle peut représenter une cellule en nid d'abeille conventionnelle pour $r = 0$ avec un angle positif $\theta > 0$, ou une cellule auxétique pour un angle négatif $\theta < 0$ pour une certaine valeur du rayon de courbure.

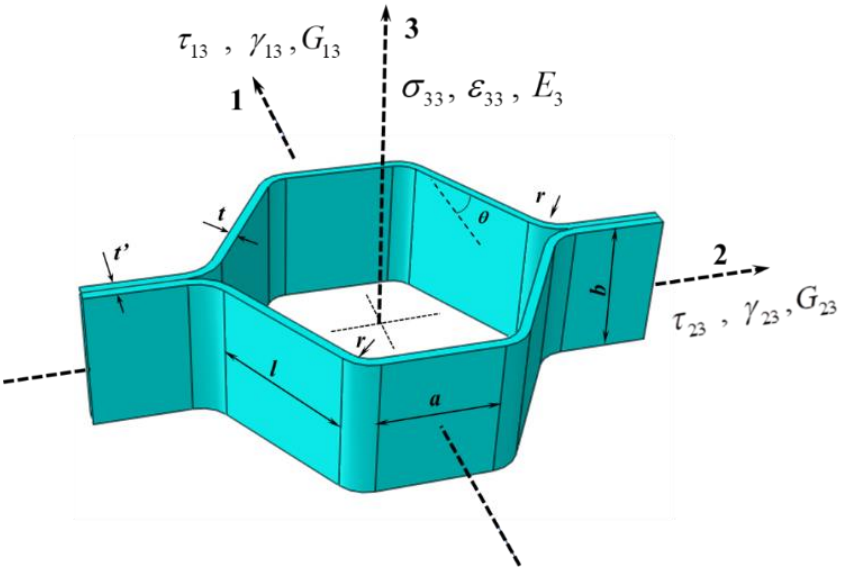


Fig. 2.15 Paramètres géométriques de la cellule en nid d'abeille avec les modules pour chaque direction

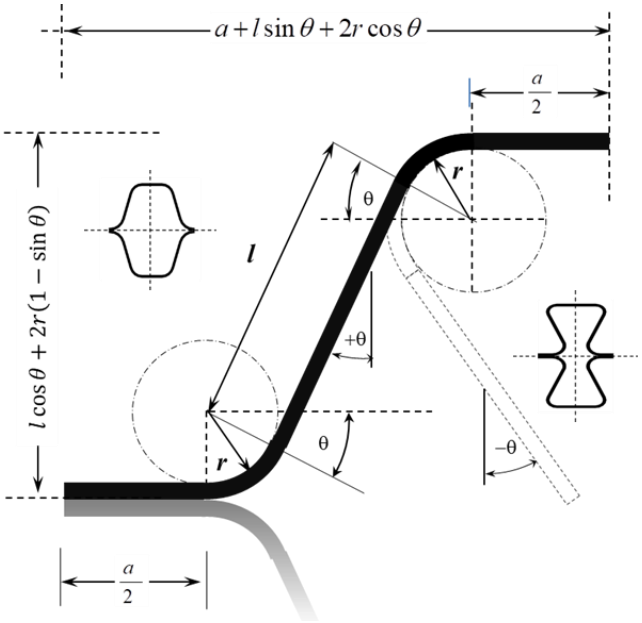


Fig. 2.16 Géométrie pour un quart de la cellule en nid d'abeilles

Les limites d'application des équations développées par la théorie pour les paramètres géométriques de la cellule élémentaire et les exigences sont les suivantes :

$$a > 2\left(l\sin\theta + r\left(1-2\cos\theta\right)\right) \tag{2.34}$$

$$\alpha = \frac{r}{l}, \beta = \frac{a}{l}, \gamma = \frac{t}{l}$$
$$\beta = \frac{a}{l} > \left|2\left(\sin\theta + \alpha\left(1-2\cos\theta\right)\right)\right| \tag{2.35}$$

avec $-70° \le \theta \le +30°$

$\alpha = \{0, 0.1, ..., 0.6\}$

pour $\theta = -60° \mapsto \beta = \sqrt{3} \quad \forall \frac{r}{l} \in [0, 0.6] \therefore \; a = \sqrt{3} l$

La condition et les limites des paramètres géométriques apparaissant dans les équations théoriques développées sont représentées sur la figure 2.17, les gammes possibles des différents angles θ avec les différentes valeurs de la courbure relative α afin d'éviter l'intersection des clinquants inclinés.

L'intervalle de paramètres géométriques le plus admissible se produit lorsque l'inégalité (2.34) est satisfaite. Plus le rapport $r / l > 0$ la courbure relative augmente, et l'intervalle d'angles de cellule internes négatifs admissibles devient large (plus la plage des angles de cellule interne potentiellement admissible devient étendue).

Notons que pour une courbure relative nulle ($r / l = 0$) et un angle de cellule interne de -30 °, la valeur de a doit être strictement supérieur à l, cependant, pour r / l = 0,6, la valeur de a est réduite à (0,12 l). Cette valeur devient supérieure à (1,75 l) pour un angle de -60 ° quel que soit le rapport r / l.

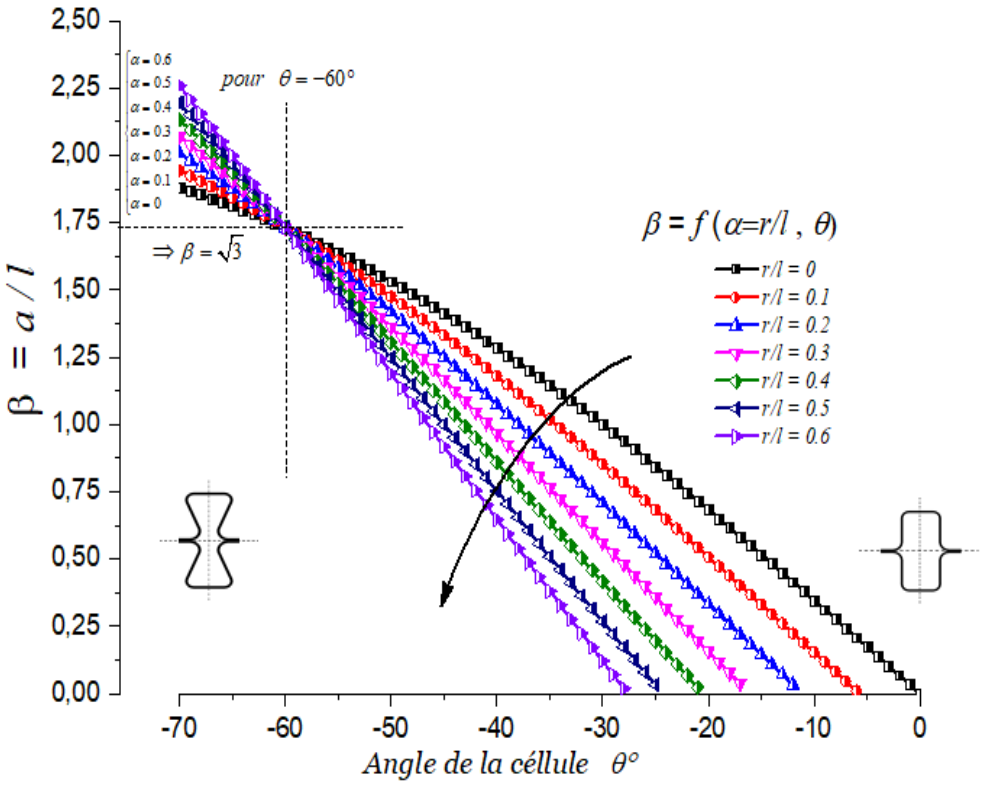


Fig. 2.17 Plages faisables d'angles θ en fonction de β pour différents rapports d'aspect r / l.

Un nid d'abeille est une répétition de murs régulièrement disposés dans l'espace et son comportement en cisaillement transverse dépend de deux modules G_{13} et G_{23}. Kelsey et al. [36], ont utilisé la structure répétitive en nid-d'abeilles pour estimer ces modules en fonction de sa géométrie. Il est à noter que lorsque les faces inférieure et supérieure du nid-d'abeilles ne sont soumises qu'à un déplacement par rapport à ces faces dans la direction (1 ou 2), le champ de cisaillement est généralement hétérogène. En d'autres termes, les parties inférieure et supérieure de chaque paroi ont tendance à tourner et ce mouvement est empêché par la présence des peaux. Pour les modules de cisaillement, la tâche est difficile, car la répartition des contraintes est compliquée et les surfaces sur lesquelles le cisaillement est appliqué n'est plus plane après déformation, ce qui rend impossible leur calcul avec précision. Cependant, les méthodes énergétiques peuvent être utilisées pour calculer leurs limites supérieures et inférieures [9-36].

Cinq modules sont nécessaires pour décrire le comportement hors plan des nids d'abeilles.

Les propriétés dans le plan cellulaire sont déjà étudiées dans la section (2.1) [5, 32].

2.2.2.2 Determination des modules de cisaillement hors plan

Une approche énergétique est utilisée pour déterminer les modules de cisaillement effectifs du nid d'abeilles. Une telle approche est facile à comprendre et à reproduire, il est efficace en temps et donne des formules convenables pouvant être utilisées pour une estimation des modules.

Dans cette approche, une contrainte de cisaillement unitaire est imposée à la cellule, le flux de cisaillement résultant est calculé, et les déformations de cisaillement correspondantes sont déterminées. Par application de la méthode de la charge unitaire et le théorème de l'énergie complémentaire minimale, la limite inférieure du module de cisaillement est trouvée G^{Inf}. De même, lorsqu'une contrainte de cisaillement unitaire est imposée à l'élément représentatif, les efforts cinématiquement équivalents dans les éléments de la plaque sont calculés, et les contraintes peuvent être déterminées. L'application de la méthode de déplacement unitaire et le théorème de l'énergie potentielle minimale donnent la limite supérieure du module de cisaillement G^{Sup}.

Les hypothèses suivantes sont respectées:

- Le matériau de la paroi cellulaire est isotrope et se comporte de manière linéaire élastique.
- Les parois sont courtes et le flambage ne se produit pas.

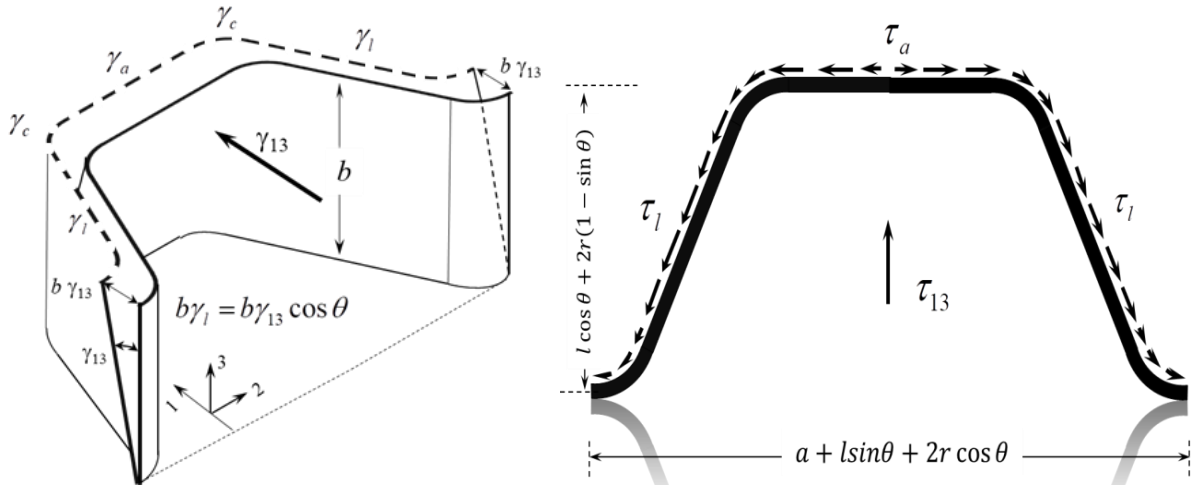
- Les parois sont reliées entre elles par des liaisons parfaites.
- L'interaction locale entre le cœur et les peaux ne sont pas considérées.

L'estimation des modules de cisaillement est fondée sur l'ensemble des hypothèses suivantes:

- Le rapport t / l est petit;
- Le rapport b / l est suffisamment grand, de sorte qu'on puisse négliger le gauchissement des parois cellulaires ;
- la contrainte de cisaillement est supposée constante dans chaque composant de la cellule unitaire;
- l'épaisseur des parois sont uniforme pour tous les éléments de cellules élémentaires, de sorte que $t_l = t_a = t$;

2.2.2.3 Module de cisaillement hors plan G_{13}

Considérons une déformation de cisaillement uniforme γ_{13}, provoquée par une contrainte de cisaillement τ_{13} appliquée le long de la direction 1 dans la face perpendiculaire à la face 3 (figure 2.18 (a-b)). Presque toute l'énergie de déformation élastique de la cellule en nid d'abeille peut être considérée comme dissipée avec la déformation en cisaillement des parois de la cellule, la rigidité à la flexion et les énergies associées à la flexion étant significativement plus petites [35]. Le théorème de l'énergie potentielle minimale s'écrit donc comme une inégalité pour le cisaillement dans la direction 1 :



a) b)

Fig. 2.18 la moitié de la cellule

a) Déformations de cisaillement due a la déstortion γ_{13} *b*) La distribution de la contrainte de cisaillement τ_{13}

$$\frac{1}{2}G_{13}\,\gamma_{13}^2\,V \le \frac{1}{2}\sum_i G_s\,\gamma_i^2\,V_i \quad \text{avec} \quad i = a, \mathrm{c}, l \tag{2.36}$$

C : la longueur de la partie courbée $\qquad c = r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Dans l'équation 2.36, *Gs* est le module de cisaillement du matériau de la paroi cellulaire, γ_i sont les déformations de cisaillement dans la paroi cellulaire et la somme est effectuée sur les parois cellulaires avec les volumes *Va*, V_C et V_L.

Les déformations de cisaillement induites dans les parois cellulaires sont, (figure 2.18 (a))

$$\gamma_l = \gamma_c = \gamma_{13}\cos\theta$$
$$\gamma_a = 0$$

L'énergie de déformation dans la partie c peut être réécrite comme

$$\frac{1}{2}G_{13}\,\gamma_{13}^2\,V = \frac{1}{2}G_s\left(2\int \gamma_l^2\,dV_l + 4\int \gamma_c^2 dV_c\right) \tag{2.37}$$

Avec

$$\int \gamma_l^2\,dV_l = blt\,\gamma_{13}^2\cos^2\theta$$

Pour trouver une expression de l'énergie de déformation du segment c, on considère qu'elle consiste en plusieurs segments droits de longueur $ds = r\,d\varphi$

L'énergie de déformation dans les murs courbes (partie c) peut être réécrite comme suit :

$$dV_c = bt\;ds = bt\,r\,d\varphi$$

$$\int \gamma_c^2\,dV_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \gamma_{13}^2\,btr\cos^2\varphi d\varphi = b\frac{rt}{4}\gamma_{13}^2\left(\pi - 2\theta + \sin 2\theta\right) \tag{2.38}$$

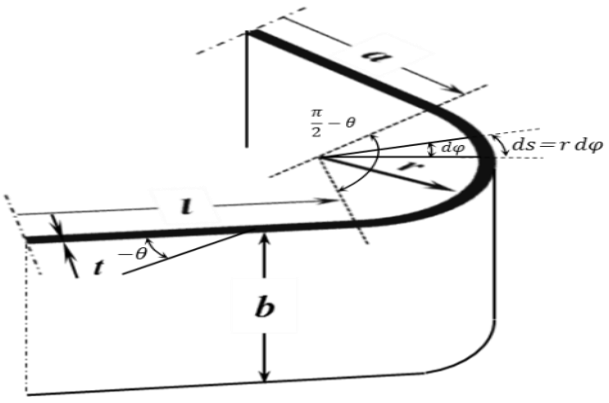


Fig. 2.19 Paramètres géométriques de la partie courbe

Maintenant, l'inégalité d'énergie de déformation de cisaillement peut s'écrire

$$G_{13}\,\gamma_{13}^2 V \le 2btG_s\gamma_{13}^2\left(l\cos^2\theta+\frac{r}{2}\left(\pi-2\theta+\sin 2\theta\right)\right) \tag{2.39}$$

Avec le volume de la cellule qui égale à :

$$V = Sb = 2b(a+2r\cos\theta+l\sin\theta)(2r-2r\sin\theta+l\cos\theta) \tag{2.40}$$

Enfin l'expression du module de cisaillement supérieur G_{13}

$$\frac{G_{13}}{G_s}\le\gamma\frac{\cos^2\theta+\frac{1}{2}\alpha\left(\pi-2\theta+\sin 2\theta\right)}{(\beta+\sin\theta+2\alpha\cos\theta)(\cos\theta+2\alpha\left(1-\sin\theta\right))} \tag{2.41}$$

Si nous fixons $r = 0$, nous revenons au module de cisaillement d'une cellule Hexagonale classique (voir Gibson et Ashby [2]):

$$\frac{G_{13}}{G_s}\le\gamma\frac{\cos\theta}{\beta+\sin\theta} \tag{2.42}$$

Pour trouver la limite inférieure du module de cisaillement transversal efficace G_{13}, une contrainte externe τ_{13} est appliquée aux faces de la cellule, ce qui induit un flux de cisaillement dans les parois des cellules en nid d'abeilles, comme la montre (figure 2.17 (b)). La paroi droite a subi une déformation en flexion uniquement ; donc $\tau_a = 0$.

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_{13}^2}{G_{13}}V\le\frac{1}{2}\sum_i\frac{\tau_i^2}{G_s}V_i \qquad i=a,\mathrm{c},l \tag{2.43}$$

Les forces d'équilibre dans la direction 1 nécessitent que la force de cisaillement appliquée sur la cellule unitaire soit égale à la somme des forces de cisaillement.

$$\tau_{13}V = 2\tau_l t\left(l\cos\theta+2r\left(1-\sin\theta\right)\right)b \tag{2.44}$$

$$\text{D'où :}\quad \tau_l = \frac{\tau_{13}V}{2bt\left(l\cos\theta+2r\left(1-\sin\theta\right)\right)} \tag{2.45}$$

Maintenant, l'inégalité énergétique complémentaire peut être écrite comme :

$$\frac{\tau_{13}^2}{G_{13}}V\le 2\frac{\tau_l^2}{G_s}\left(l+2r\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)bt \tag{2.46}$$

Avec l'expression du *V* donnée par (2.40) enfin, la borne inférieure du module de cisaillement transverse efficace G_{13} du nid-d'abeilles se trouve comme

$$\frac{G_{13}}{G_s} \geq \gamma \frac{\cos\theta + 2\alpha\left(1 - \sin\theta\right)}{\left(\beta + 2\alpha\ \cos\theta + \sin\theta\right)\ \left(1 + \alpha\left(\pi - 2\theta\right)\right)} \tag{2.47}$$

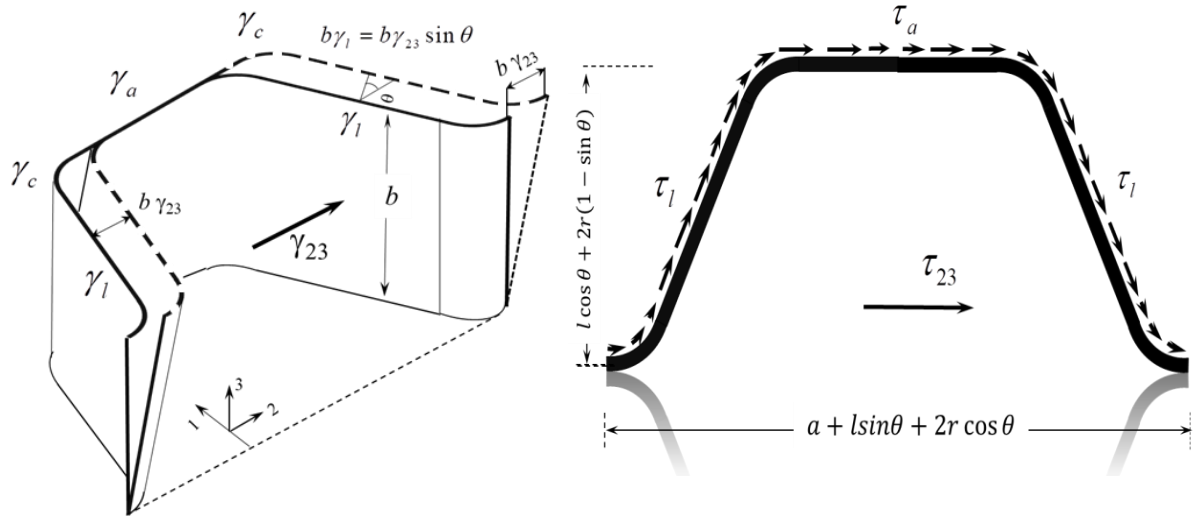
Si nous fixons $r = 0$, nous revenons au module de cisaillement d'une cellule Hexagonale classique (voir Gibson et Ashby [2]).

2.2.2.4 Module de cisaillement hors plan G_{23}

Si nous considérons maintenant une contrainte de cisaillement τ_{23} dans la direction 2, agissant sur la surface de la normale à la direction 3 (figure 2.20 (a-b)).

Les déformations de cisaillement induites dans les parois cellulaires sont :

$$\begin{aligned} \gamma_l &= \gamma_c = \gamma_{23} \sin\theta \\ \gamma_a &= \gamma_{23} \sin\theta \end{aligned} \tag{2.48}$$



a) b)

Fig. 2.20 Moitié de la cellule sous contrainte / déformation de cisaillement

b) Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{13}

a) Déformations de cisaillement due a la déstortion γ_{23}

Le théorème de l'énergie potentielle minimale est exprimé par l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} G_{23}\, \gamma_{23}^2 V \leq \frac{1}{2} \sum_i G_s\, \gamma_i^2 V_i \qquad i = a, \mathrm{c}, l \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{2}G_{23}\,\gamma_{23}^2\,V \le \frac{1}{2}G_s\left(\int \gamma_a^2\; dV_a + 2\int \gamma_l^2\; dV_l + 4\int \gamma_c^2\, dV_c\;\right) \tag{2.50}$$

Avec

$$\int \gamma_l^2\, dV_l = \gamma_{23}^2\; lt\sin^2\theta$$

$$dV_c = bt\; rd\varphi$$

$$\int \gamma_c^2\, dV_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \gamma_{23}^2\; btr\sin^2\varphi d\varphi = b\frac{rt}{4}\gamma_{23}^2\left(\pi - 2\theta - \sin 2\theta\right) \tag{2.51}$$

Substituent (2.51) dans equation (2.50)

$$G_{23}\,\gamma_{23}^2 V \le btG_s\,\gamma_{23}^2\left(a + 2l\sin^2\theta + r\left(\pi - 2\theta - \sin 2\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{G_{23}}{G_s} \le \gamma\frac{\beta + 2\sin^2\theta + \alpha\left(\pi - 2\theta - \sin 2\theta\right)}{2(\beta + \sin\theta + 2\alpha\;\cos\theta\;)\;(\cos\theta + 2\alpha\left(1 - \sin\theta\right)\;)} \tag{2.52}$$

$$\frac{G_{23}}{G_s} \le \frac{1}{2}\gamma\frac{\beta + 2\sin^2\theta}{(\beta + \sin\theta)\;\cos\theta} \tag{2.53}$$

Pour une charge de cisaillement dans le plan 2-3, la contrainte de cisaillement appliquée induit à nouveau des forces de cisaillement dans les blocs de la paroi cellulaire qui doivent être en équilibre avec la force de cisaillement appliquée dans 2 directions, ou :

$$\tau_{23}V = 2\tau_l t\left(a + l\sin\theta + 2r\cos\theta\right)b \tag{2.54}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\tau_{23}^2}{G_{23}}V \le \frac{1}{2}\sum_i \frac{\tau_i^2}{G_s}V_i \qquad\end{aligned}\right\}\;\; i = c,l,a \tag{2.55}$$

$$\text{Avec :}\;\; \tau_l = \frac{\tau_{13}V}{2bt\left(a + l\sin\theta + 2r\cos\theta\right)} \tag{2.56}$$

$$V = Sb = \;2b(a + 2r\;cos\theta + l\;sin\theta)\;(2r - 2r\;sin\theta + l\;cos\theta) \tag{2.57}$$

Le module de cisaillement effectif s écrit comme suit :

$$\frac{G_{23}}{G_s} \ge \gamma\frac{\beta + \sin\theta + 2\alpha\cos\theta}{\left(1 + 2\beta + 2\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)\left(cos\theta + 2\alpha\left(1 - \sin\theta\right)\right)} \tag{2.58}$$

Si nous fixons *r = 0*, nous revenons au module de cisaillement d'une cellule Hexagonale classique (voir Gibson et Ashby [2]):

$$\frac{G_{23}}{G_s} \geq \gamma \frac{\beta + \sin\theta}{(1+2\beta)\cos\theta} \tag{2.59}$$

On constate que la hauteur des cellules *b* n'intervient pas dans les expressions précédentes.

2.2.2.5 Modèle de Kelsey [36]

Les limites supérieures et inférieures des modules de cisaillement à âme sandwich en nid d'abeille sont obtenues par Kelsey et coll. [36]. Les auteurs ont utilisé des expressions simples en appliquant les méthodes de déplacement unitaire et de charge unitaire sur l'élément unitaire (figure 2.20) ainsi que des hypothèses simplifiées sur les déformations et de contrainte respectivement dans le cœur.

Les noyaux en nid-d'abeilles sont construits en répétant l'élément du modèle Gibson et Ashby [1] que sont rarement utilisés en ingénierie, tandis que les noyaux en nid d'abeille avec des parois horizontales à double épaisseur (figure 2.21) sont plus couramment utilisés (Kelsey et coll. [36]).

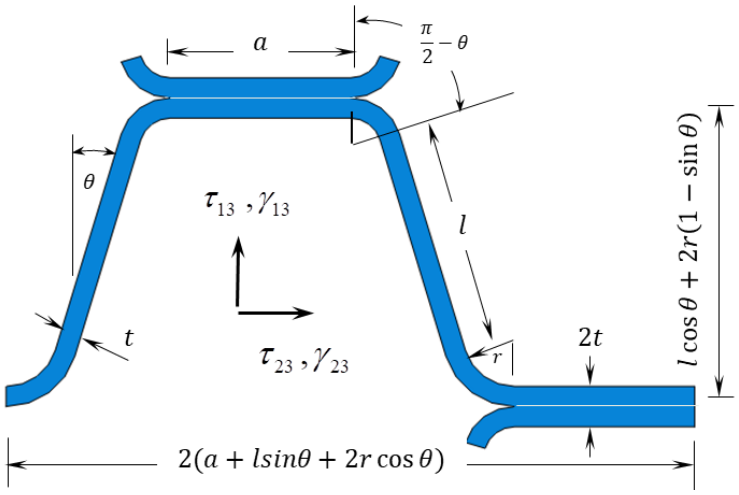


Fig. 2.21 Les éléments unitaires du modèle « Kelsey »

Le cas le plus courant est constitué de l'alvéole en nid-d'abeilles réalisée à partir de tôles découpées, imprimées et collées les unes aux autres.

Dans ce cas *t'= 2t* et les relations qui changent sont les suivantes :

$$\frac{G_{23}^{Lower}}{G_s} = 2\gamma \frac{(\beta + \sin\theta + 2\alpha\cos\theta)^2}{(1+\beta+\alpha(\pi - 2\theta))S} \tag{2.60}$$

$$\frac{G_{23}^{Upper}}{G_s} = \gamma \frac{(\beta + \sin^2\theta) + \frac{1}{2}\alpha(\pi - 2\theta - \sin 2\theta)}{S} \tag{2.61}$$

Avec

$$S = 2\left(\beta + 2\alpha\cos\theta + \sin\theta\right)\left(2\alpha + \cos\theta - 2\alpha\sin\theta\right) \tag{2.62}$$

2.2.2.6 Coefficient de Poisson hors plan

On s'attend à ce que $E_3 >> E_1$, les contraintes directes appliquées dans le plan produiront des déformations dominées par la flexion des parois internes.

$$\begin{aligned} \nu_{13} &= \nu_{31}\frac{E_1}{E_3} \approx 0 \\ \nu_{23} &= \nu_{32}\frac{E_2}{E_3} \approx 0 \end{aligned} \tag{2.63}$$

ν_{31} et ν_{32} reliant les déformations dans le plan à la déformation dans la direction 3 [1].

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_s \tag{2.64}$$

Les coefficients de Poisson hors plan effectifs sont égaux à ceux du matériau de la paroi cellulaire solide.

2.2.2.7 Module de Young hors plan E_3

Le module Young de nid-d'abeilles hors plan dans la direction 3 peut être estimé en supposant que pour la charge normale dans le sens 3, la déformation est axiale. Par conséquent, le module longitudinal du nid-d'abeilles peut être exprimé comme :

$$\sigma_3 = \frac{\nu_{13}}{1-\nu_{12}-2\nu_{13}\nu_{31}} E_3\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + \frac{1-\nu_{12}}{1-\nu_{12}-2\nu_{13}\nu_{31}} E_3\,\varepsilon_3 \tag{2.65}$$

$\nu_{13} = \nu_{23} \approx 0$

La contrainte agissante sur la zone occupée par une cellule unitaire est comme suit.

$$\sigma_3 = E_3\ \varepsilon_3 \tag{2.66}$$

$$\frac{E_3}{E_s} = \frac{\rho}{\rho_s} = \gamma\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\beta + 2 + 2\alpha(\pi - 2\theta)}{\left(\beta + 2\alpha\cos\theta + \sin\theta\right)\left(2\alpha + \cos\theta - 2\alpha\sin\theta\right)}\right\} \rightarrow t' = \mathrm{t} \tag{2.67}$$

$$\frac{E_3}{E_s} = \frac{\rho}{\rho_s} = \gamma\frac{\left(\beta + 1 + \alpha(\pi - 2\theta)\right)}{\left(\beta + 2\alpha\cos\theta + \sin\theta\right)\left(2\alpha + \cos\theta - 2\alpha\sin\theta\right)} \qquad \rightarrow t' = 2\,\mathrm{t} \tag{2.68}$$

Le module de Young E_3 pour une charge normale dans la direction 3 reflète simplement le module solide, E_s mis à l'échelle par la zone de la section porteuse.
Le terme entre crochets donne simplement une description plus précise de l'aire projetée des parois cellulaires normale à 3

2.2.3 Modélisation par Eléments Finis

Gibson et Ashby [1] ont rapporté que le calcul des propriétés de cisaillement transverse n'est possible et exact qu'avec des simulations numériques, les auteurs ont proposé des expressions approchées pour estimer les limites supérieures et inférieures des modules de cisaillement transverse.
Une procédure simplifiée par éléments finis pour déterminer les modules d'élasticité hors plan équivalent d'un cœur de cellule à parois courbées et pour les différentes configurations (conventionnelles et Auxétiques) a été présentée. Les conditions aux limites appliquées sur le V.E.R afin de reproduire le comportement du cœur global sont données pour les différents modules dans le tableau 2.3.
Étant donné que les déformations varient dans la direction normale au plan et que la cellule en nid-d'abeilles n'est périodique que dans un seul plan, un modèle 3D qui prend en compte la flexion des parois est essentiel pour évaluer avec précision les propriétés transversales équivalentes de la structure cellulaire [29].

Tab 2.3 Les conditions aux limites appliquées pour simuler les modules hors plan

		E_3 , ν_{13} , ν_{23}	G_{13}	G_{23}
$Z = 0$	U_1	0	0	0
	U_2	0	0	0
	U_3	0	0	0
$Z = b$	U_1	-	1	0
	U_2	-	0	1
	U_3	1	-	-

Un modèle numérique représentatif tridimensionnel V.E.R (3D) (figure 2.22 (a-b)) est développé pour calculer les modules d'élasticité hors plan des cellules en nid-d'abeilles à parois courbes en gardant une épaisseur constante. Les différents modules sont évalués en effectuant une série d'analyses par éléments finis (MEF). Les résultats numériques montrent que la distribution des éléments dans les parois courbés d'un modèle 3D joue un rôle important dans la détermination des propriétés élastiques hors plan des nids d'abeilles.

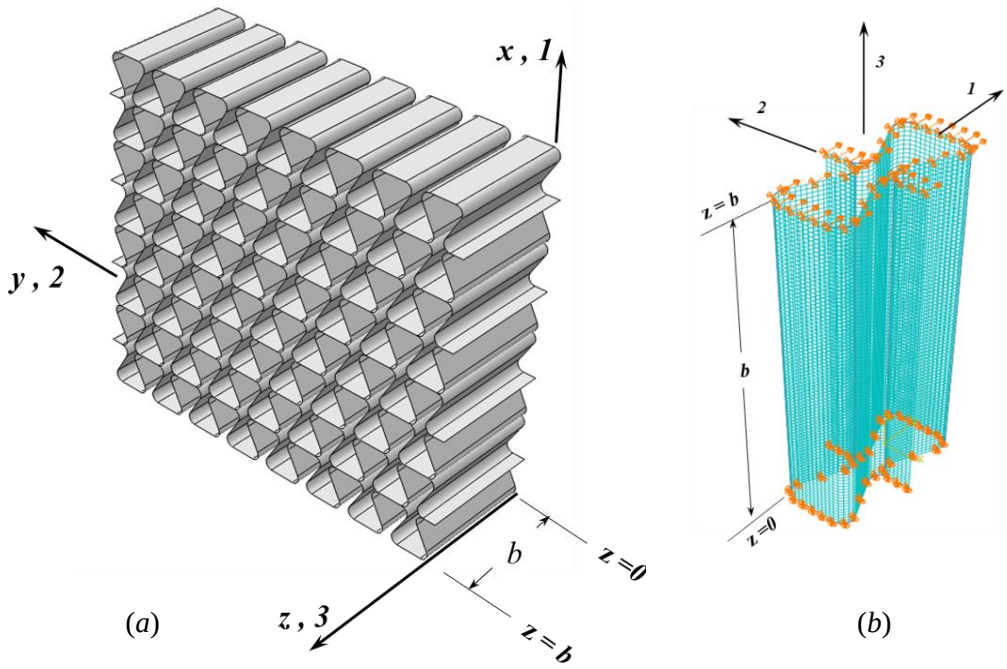


Fig. 2.22 Description du modèle numérique
(*a*) Élément de volume représentatif (VER) *b*) Conditions aux limites appliquées pour simuler G_{13}

Le modèle d'EF représenté par un VER est un assemblage de 53 cellules modélisées par 63975 éléments de coque élastique avec la technique d'intégration réduite (S4R).

L'effet de l'ordre des éléments a été étudié en considérant les éléments de coque à 4 et 8 nœuds du code commercial Abaqus 6.10 [25]. Les résultats étaient pratiquement identiques pour les deux éléments pour E_3 et une légère différence dans le cas de G_{13} et G_{23}, par conséquent, seuls les éléments à 4 nœuds sont utilisés.

Des modèles numériques de cellules en cisaillement ont été raffinés au niveau de la partie arrondie des parois cellulaires pour inclure plus précisément les effets de la flexion. Une comparaison de la rigidité de cisaillement hors plan avec celle des cellules hexagonales classiques a été effectuée afin de valider les résultats trouvés, et cela pour toutes les valeurs considérées de la courbure de la paroi cellulaire. Une vérification supplémentaire est fournie en considérant les relations analytiques reliant les différents modules de rigidité hors plan en mécanique des structures nécessaires pour que les relations soient satisfaites.

La rigidité effective de l'âme est déterminée en trouvant la force nécessaire pour produire un déplacement unitaire dans une direction donnée, en déterminant la contrainte et la déformation résultante, puis en calculant les constants élastiques correspondants. Ce processus peut être utilisé pour trouver les cinq constantes d'ingénierie hors plan efficaces : E_3, G_{13}, G_{23}, ν_{13} et ν_{23}.

Nous avons

$$\begin{cases} E_3 = \dfrac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \dfrac{b}{S}\dfrac{F_3}{u_3} \\ G_{ij} = \dfrac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \dfrac{b}{S}\dfrac{F_i}{u_i} \qquad i = 1,2;\ j = 3 \\ \nu_{ij} = -\dfrac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \end{cases} \tag{2.69}$$

F_i : c'est la force dans la direction *i*

σ_3, ε_3, E_3 : sont une contrainte normale, une déformation normale et un module de Young respectivement dans directions 3 ;

τ_{ij}, G_{ij} ν_{ij} : sont respectivement la contrainte de cisaillement, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson dans le plan *i-j*.

2.2.4 Résultats et discussions des modules relatifs hors plan

Une expression de limite supérieure est obtenue via le théorème de l'énergie potentielle totale minimale, dans lequel un état de contrainte compatible avec les conditions aux limites a été imposé en négligeant la contrainte dans le cœur en nid d'abeille. En revanche, une estimation de la limite inférieure est obtenue en utilisant le théorème de l'énergie complémentaire minimale, dans laquelle l'équilibre des composantes de la contrainte interne avec les conditions aux limites est imposé en négligeant la compatibilité de la contrainte dans le nid-d'abeilles du cœur. Il convient de noter qu'une différence de (10% à 35%) a été trouvée entre les modules G_{13} et G_{23} conformément aux travaux de Zhang [38] et Chamis [27] basés sur un modèle tridimensionnel détaillé d'éléments finis du nid-d'abeilles comprenant plusieurs cellules. Ses résultats étaient basés sur les mêmes conditions aux limites prises pour les cellules utilisées dans notre modèle. Chamis [27] a également observé une légère différence entre G_{13} et G_{31} et une égalité parfaite entre G_{23} et G_{32}, tous cohérents avec les résultats actuels.

Comme pour tous les autres types de cellules en nids d'abeilles. La rigidité hors plan se révèle être linéairement proportionnelle à la densité relative [1]. Les coefficients de Poisson hors plan sont estimés approximativement à zéro du fait que la rigidité hors plan est supérieure à celle dans le plan. Pour les structures cellulaires en nid d'abeille, le gauchissement des clinquants est fonction de *b/l* et *r/l*. Néanmoins, les modules théoriques de cisaillement transverse équivalents sont indépendants de *b/l*.

2.2.4.1 Limites théoriques de G_{23}^{Inf} / G_s et G_{23}^{Sup} / G_s

La figure 2.23 montre la variation des limites théoriques supérieures et inférieures du module de cisaillement transversal non dimensionnel G_{23} / G_s en fonction de l'angle interne de la cellule θ et de la courbure relative des parois pour certains paramètres fixés à : $\beta = a / l = 1$ et $\gamma = t / l = 1/30$. Le module de cisaillement transversal G_{23} / G_s a une relation inverse avec la courbure relative r / l en raison de l'effet de la déformation en flexion des parois dans le plan. Il est important de noter que les deux bornes de G_{23} / G_s convergent dans le domaine des angles internes positifs, et divergents pour les angles négatifs correspondant à un comportement auxétique et cela pour les différentes valeurs de r / l.

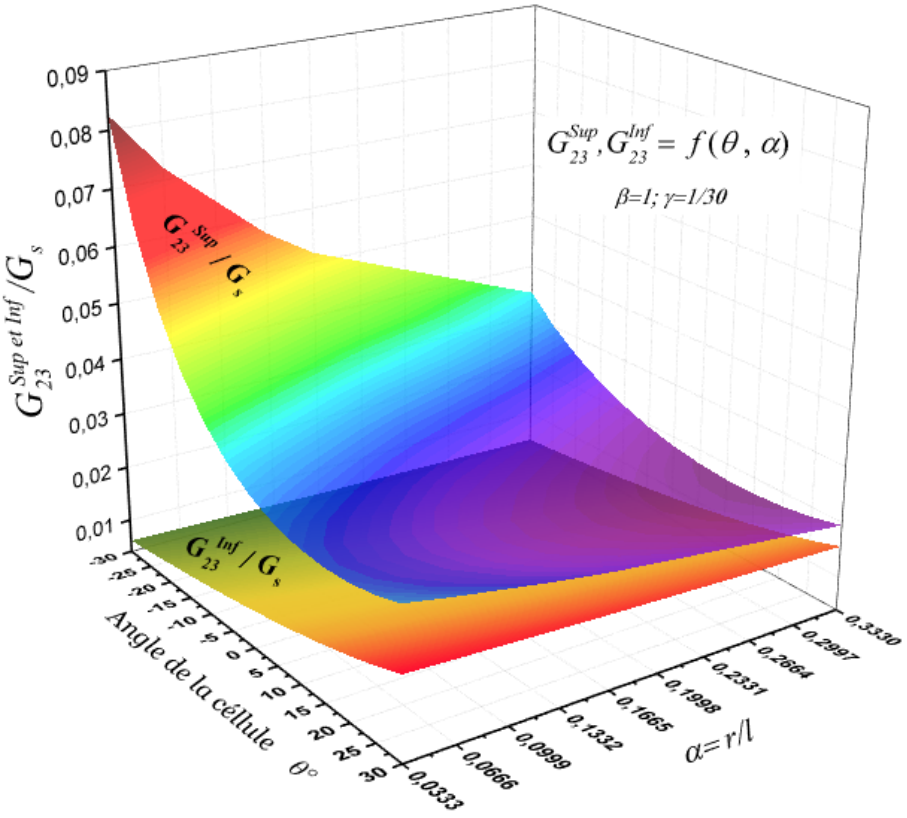


Fig. 2.23 Rapports des limites théoriques supérieure et inférieure $G_{23}^{Sup\ et\ Inf} / G_s$ par rapport aux rapports de courbure $\alpha = r / l$ et l'angle de cellule interne θ ($\beta = 1$, $\gamma = 1/30$).

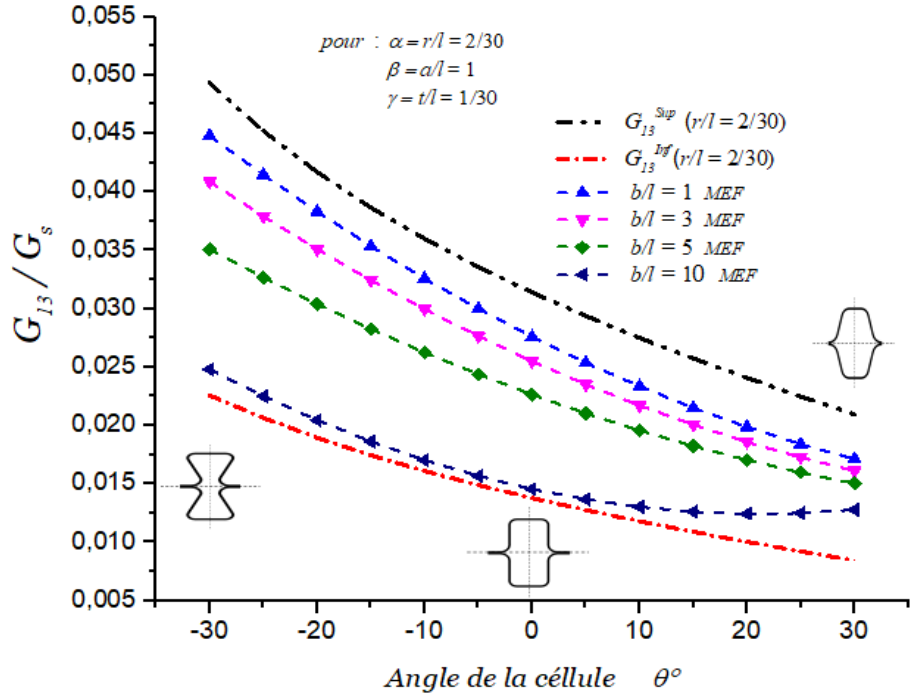
2.2.4.2 Variation du module de cisaillement hors plan G_{13} / G_s en fonction des paramètres géométriques des nid d'abeilles

La figure 2.24 représente les résultats obtenus à partir de la variation du module de cisaillement hors plan G_{13} / G_s en fonction de l'angle de cellule θ. Les limites supérieures et inférieures de G_{13} / G_s ont été déterminées analytiquement et numériquement par MEF pour trois valeurs de rayon de courbure r / l et de la profondeur de cellule b / l. Le module de cisaillement transverse G_{13} / G_s montre une forte augmentation dans le domaine des coefficients de Poisson négatifs, ces variations sont largement affectées par les rapports d'aspects r / l et b / l. Le G_{13} / G_s diminue avec l'augmentation des rapports r / l et b / l.

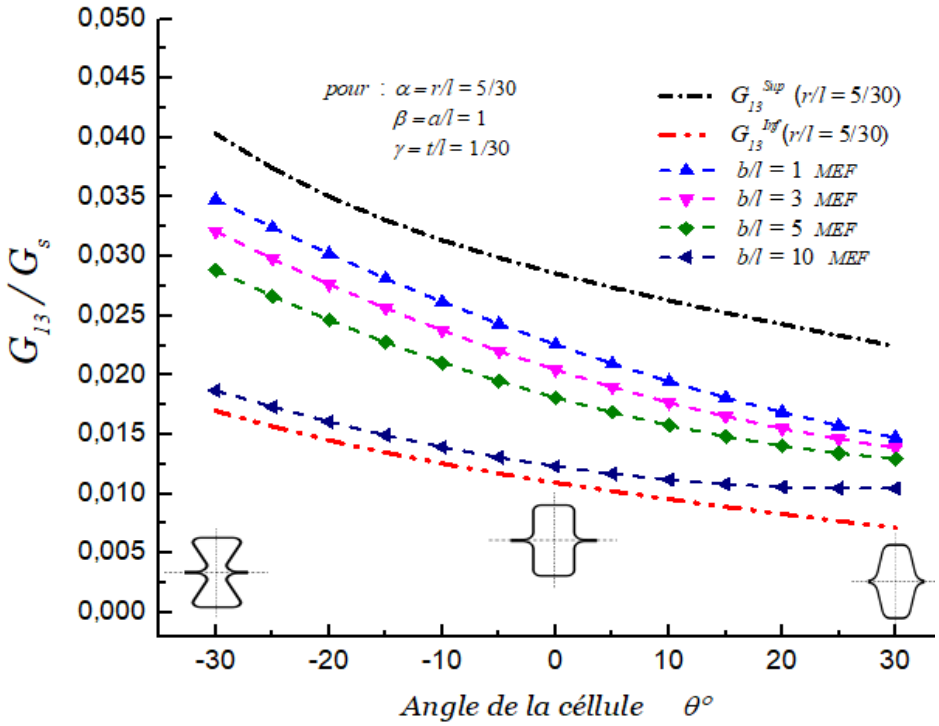
L'augmentation de b / l de 1 à 10 avec des valeurs fixées à r / l = 2/30, a / l = 1 et r / l = 1/30 conduit à une baisse de G_{13} / G_s de 45% pour θ =–30° et 25% pour θ=+30° (figure 2.24-a). Alors que pour la même condition, mais avec r / l = 10/30 (figure 2.24-c), le G_{13} / G_s diminue de 31% pour θ=–30° et de 23% pour θ=+30°. Lorsque $b \geq 10l$, le module de cisaillement G_{13} / G_s est assez proche de la limite inférieure donnée dans l'équation (2.47), tandis que pour $b \leq 10l$, il est proche de la limite supérieure, ils peuvent donc être choisis comme limites pour la rigidité équivalente au cisaillement transverse de la cellule en nid d'abeille.

Le module de cisaillement G_{13} / G_s est maximisé pour les angles de cellule négatifs θ, ce qui est particulièrement avantageux pour les structures en sandwich à nid-d'abeilles à coque mince utilisées principalement dans le domaine de l'aérospatiale où un faible poids accompagné d'une rigidité élevée est recommandé.

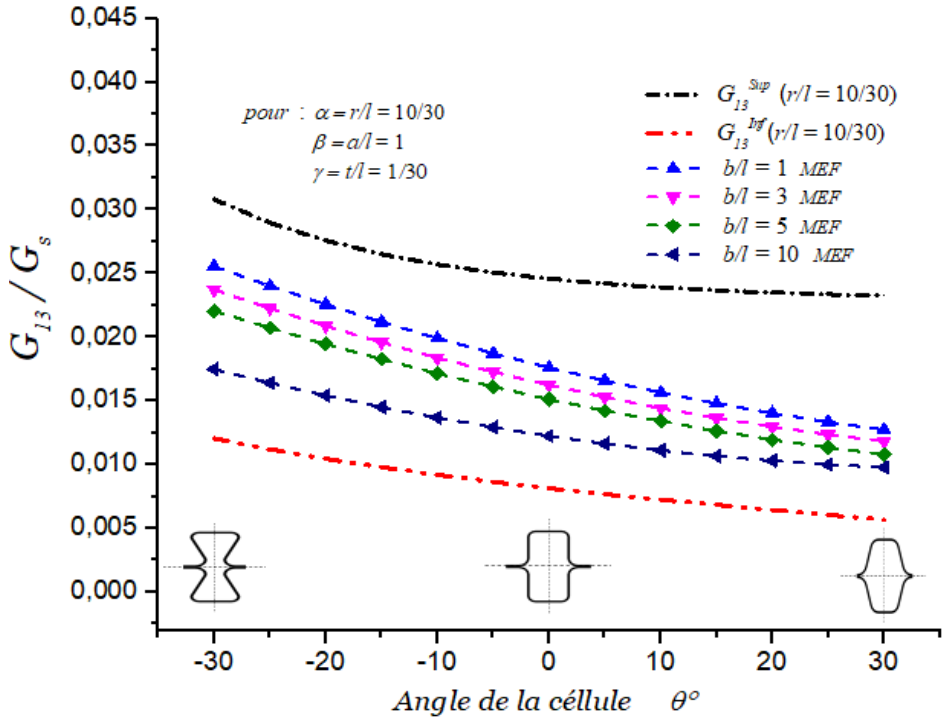
Les résultats de la MEF pour le module de cisaillement hors plan G_{13} / G_s sont en excellent accord (pour les paramètres considérés) avec les résultats analytiques et reflètent l'effet de la profondeur de la cellule, en particulier dans le domaine des angles cellulaires négatifs (figure 2.24). En général, G_{13} / G_s diminue avec l'augmentation de la courbure relative et de la profondeur des cellules.


pour : α = r/l = 2/30
β = a/l = 1
γ = t/l = 1/30
G_{13}^{Sup} (r/l = 2/30)
G_{13}^{Inf} (r/l = 2/30)
b/l = 1 MEF
b/l = 3 MEF
b/l = 5 MEF
b/l = 10 MEF
G_{13}/G_s
Angle de la céllule θ°

a)


pour : α = r/l = 5/30
β = a/l = 1
γ = t/l = 1/30
G_{13}^{Sup} (r/l = 5/30)
G_{13}^{Inf} (r/l = 5/30)
b/l = 1 MEF
b/l = 3 MEF
b/l = 5 MEF
b/l = 10 MEF
G_{13}/G_s
Angle de la céllule θ°

b)



c)

Fig. 2.24 Effet de l'épaisseur relative de la jauge *b /l* sur le module de cisaillement non dimensionnel (G_{13}/ G_S) en fonction de l'angle de cellule interne pour différents rapports de courbure $\alpha = r / l$ et pour : *a*): $\alpha = r / l = 2/30$ *b*) : $\alpha = r / l = 5/30$ *c*) : $\alpha = r / l = 10/30$

2.2.4.3 La variation du module de cisaillement hors plan G_{23} / G_s en fonction des paramètres géométriques des nid d'abeilles

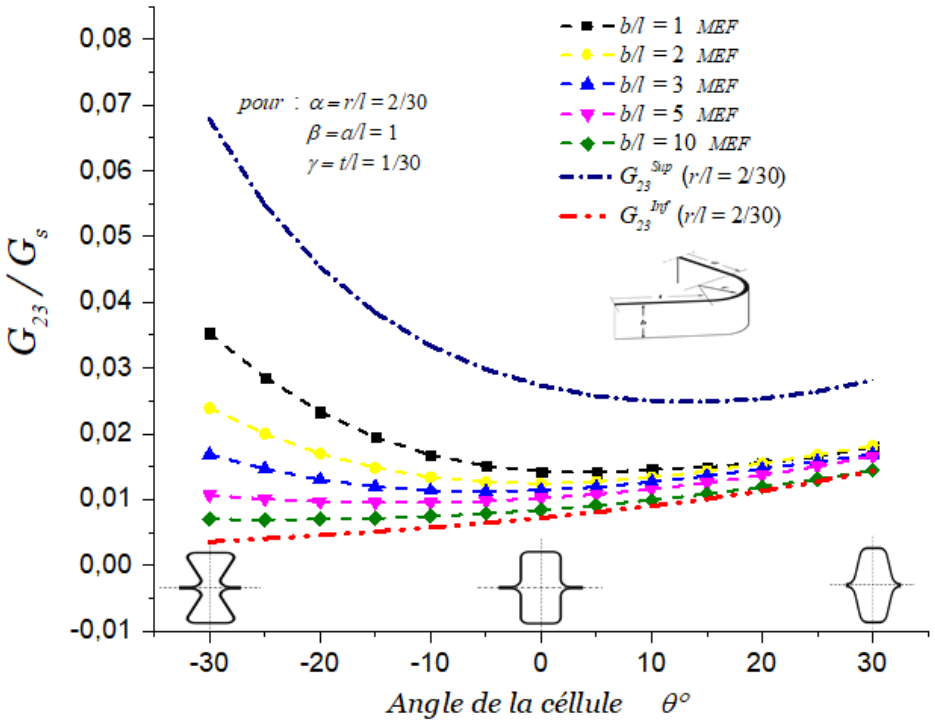
La figure 2.25 montre la variation du G_{23} / G_s en fonction de l'angle de la cellule θ pour trois valeurs de *r /l* : ($r / l = 2$, $r / l = 5$ et $r / l = 10$) et quatre valeurs de profondeur de cellule *b / l*. Les limites supérieures et inférieures de G_{23} ont été déterminées analytiquement. Les mêmes tendances sont enregistrées pour les deux modules de cisaillement.

Il est clair que pour un r / l donné, le module G_{23} / G_s atteint son maximum pour les faibles valeurs de la profondeur de cellule $b / l < 3$ et pour la conception auxétique, alors qu'il décroit avec l'augmentation de θ (nid d'abeille classique). En revanche, le module G_{23} / G_s de cellules auxétiques est plus sensible au rapport *b / l*. Une baisse de 80% de G_{23} / G_s est notée si *b / l* passe de 1 à 10 avec $r / l = 2/30$ et $\theta = -30°$ (figure 2.25-a), alors qu'elle ne diminue que de 20% pour $\theta = +30°$ dans le cas $r / l = 10$ (figure 2.25-c) et des chutes de G_{23} de 73% et 12% sont enregistrées pour θ égal à -30 et +30 respectivement. L'augmentation de G_{23} est

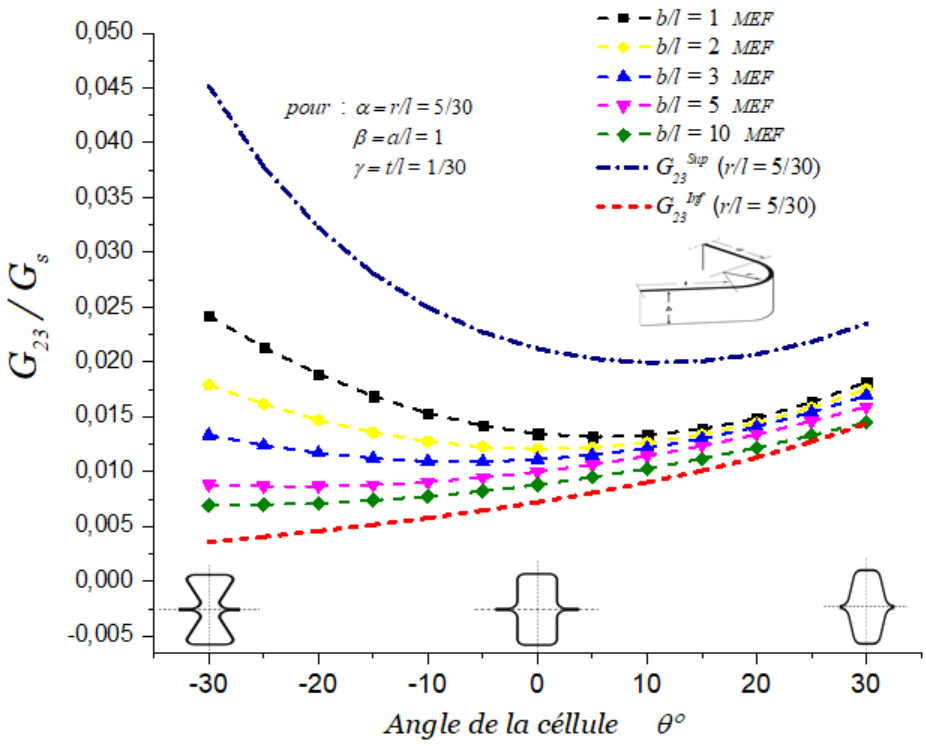
importante pour de faibles profondeurs et rayons relatives (b / l et r / l) dans la configuration auxétique.

Les limites inférieures et supérieures de G_{23} déterminées analytiquement par les équations (2.60) et (2.61) sont représentées par des lignes pointillées où un grand écart apparait pour les cellules d'angles internes négatifs à partir de $\theta = -10$ °. Le module de cisaillement G_{23} déterminé numériquement par MEF est relativement proche du résultat analytique de la limite inférieure.

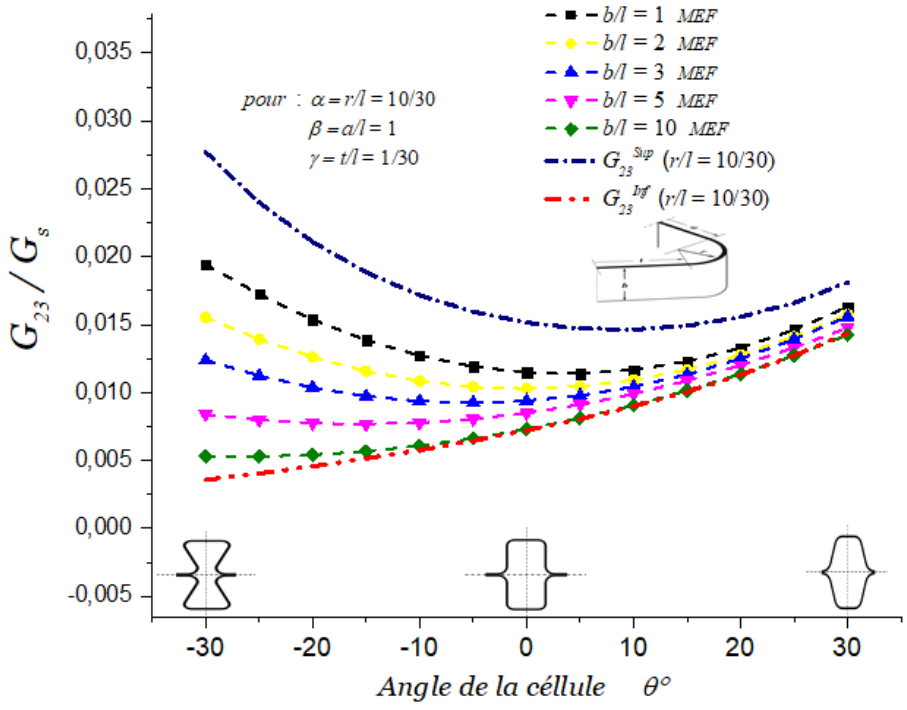
L'effet de la direction de la charge de cisaillement montre que la direction 1 est supérieure de 28% en termes de résistance au cisaillement que la direction 2, pour les mêmes paramètres géométriques. Les propriétés de cisaillement les plus élevées correspondent aux faibles courbures de la paroi cellulaire et pour des angles de cellule négatifs dépassant -10 °.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. 2.25 Effet de l'épaisseur relative de la jauge *b / l* sur le module de cisaillement non dimensionnel (G_{23} / G_S) en fonction de l'angle de cellule interne pour différents rapports de courbure $\alpha = r / l$

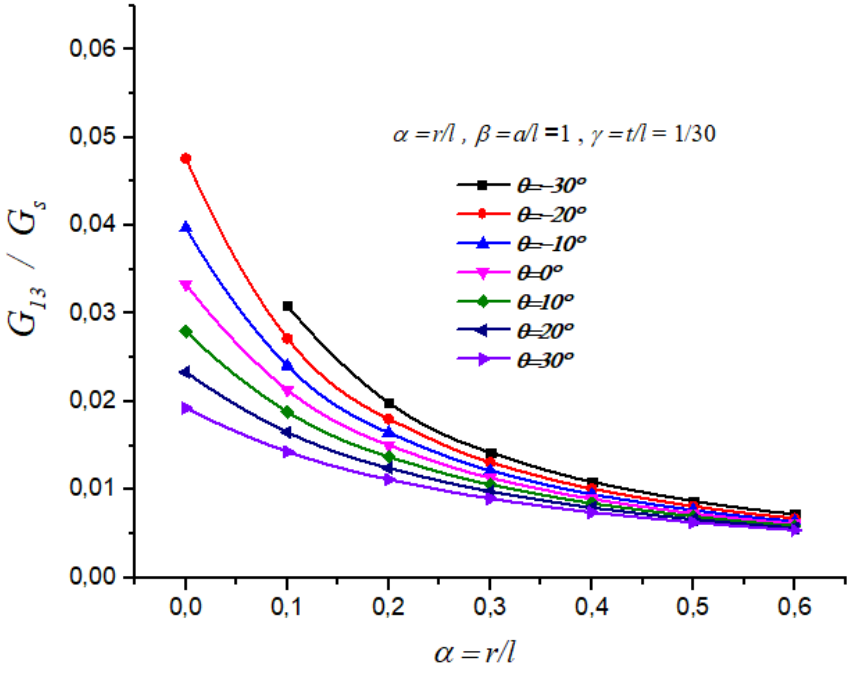
(*a*): $\alpha = r / l = 2/30$ (*b*) : $\alpha = r / l = 5/30$ (*c*) : $\alpha = r / l = 10/30$

2.2.4.4 Variation des modules de cisaillement hors plan (G_{13} / G_s et G_{23} / G_s) en fonction du rapport de courbure pour différents angles de cellule

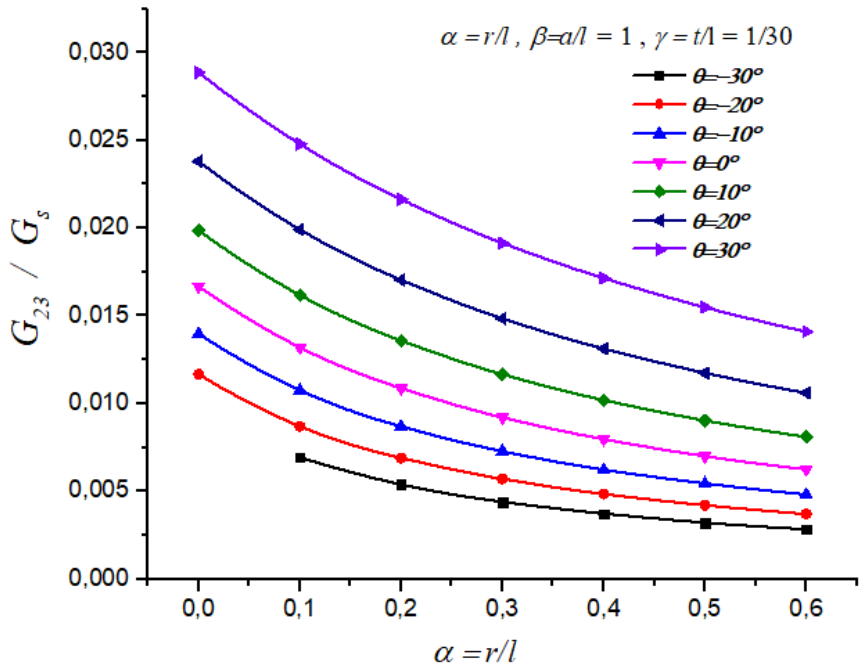
La figure *2.26* représente l'évolution des modules de cisaillement effectifs hors plan G_{13} / Gs et G_{23} / Gs en fonction du rapport de courbure r / l qui varie entre 0 et 0,6 pour différents angles de cellule θ qui varient avec un pas de 10 ° de -30 ° à + 30 ° et en fixant les paramètres $\beta = a / l = 1$ et $\gamma = t / l = 1/3$.

L'analyse des résultats montre que les valeurs maximales des modules G_{13} / G_s et G_{23} / G_s sont obtenues pour r / l égal à zéro et l'augmentation de ce dernier entraîne leurs diminutions. De plus, l'accroissement de θ de -30 à +30 conduits à une diminution de G_{13} / G_s tandis que G_{23} / G_s augmente. En d'autres termes, les valeurs maximales de G_{13} / G_s sont obtenues pour des cellules avec des angles positifs , et le cas contraire pour le module relatif G_{23} / G_s.

L'augmentation de r / l de 0 à 0,6 entraine une diminution de G_{13} / G_s et G_{23} / G_s respectivement de 83,33% et 50% pour un angle de $\theta = -20°$ (*figure 2.26-a*) et 65% et 38,62% pour $\theta = +30°$ (figure *2.26-b*). Pour un rapport de courbure r / l = 0,1, une diminution de G_{13} / Gs et G_{23} / Gs respectivement de 56,25% et 70% est enregistrée entre les deux angles de cellule extrêmes $\theta = -30°$ et +30°.



a)



b)

Fig. 2.26 Modules de cisaillement hors plan en fonction des rapports de courbure $\alpha = r / l$ pour différents angles de cellule internes : *a*) G_{13} / G_s *b*) G_{23} / G_s

2.2.4.5 Ajustement de G_{13} / G_s et G_{23} / G_s (courbe de tendance (CT))

- La caractérisation du module de cisaillement G_{23} est fondamentale dans la mécanique des sandwichs, car il joue un rôle important dans leur comportement. L'effet de la hauteur de la cellule *b* a été introduit par le modèle développé par Grediac [41] et étendu par Scarpa qui montre l'influence de ce paramètre sur les grandeurs du module de cisaillement G_{23}. L'analyse par un modèle formé par un volumique élémentaire représentatif (VER) a permet de simuler précisément le comportement global du regroupement de cellules. Les constatations suivantes ont pu être tirées.

- Une valeur unique pour le module de cisaillement transverse en fonction de la hauteur de la cellule peut être calculée en utilisant une approche similaire à celle de Grediac [41] et raffinée par Scarpa et Tomlin [17] particulièrement pour les configurations auxétiques.

- Il est important de noter que l'estimation des bornes supérieures et inférieures de G_{23} sont calculées sur la base d'une analyse analytique bidimensionnelle. Par conséquent, l'effet de la hauteur de la cellule hors plan *b* est négligé.

- L'influence de l'épaisseur hors-plan nécessite l'utilisation d'un système d'interpolation exponentielle. Dans ce cas, selon [5, 10, 12], un ajustement numérique basé sur les modèles EF peut pallier ce problème.

Comme dans le cas des nids-d'abeilles centrosymétriques hexagonaux, le module de cisaillement transversal peut être approché en liant à travers l'épaisseur de jauge les limites de cisaillement supérieure (G^{Sup}) et inférieure (G^{Inf}). La relation peut être exprimée comme dans l'équation 2.70, qui est obtenu par ajustement de fit non linéaire avec un niveau de confiance de 97% sur 989 configurations. Les figures 2.27 *a, b* et *c* montrent la variation du module G_{23} / G_s avec la hauteur de la cellule effective *b/l* et pour les trois valeurs de la courbure relative r*/l*=0, 5/30 et 10/30. Un accord significatif entre les résultats numériques MEF et la relation approchée peut être observé.

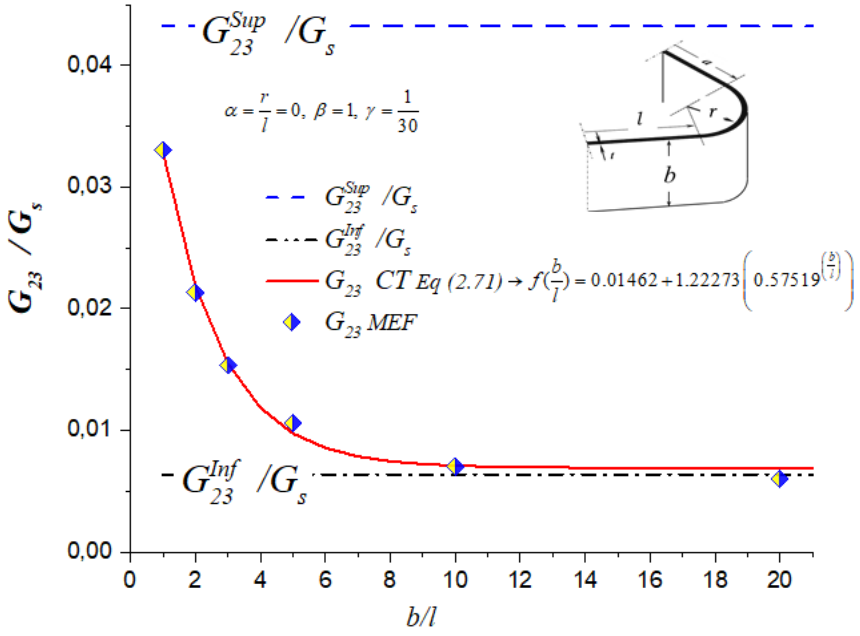
Le module de cisaillement peut être exprimé par:

$$G_{23}^{r/l} = G_{23}^{Inf} + f(\frac{b}{l})\left(G_{23}^{Sup} - G_{23}^{Inf}\right) \tag{2.70}$$

Avec les fonctions pour chaque courbure relative :

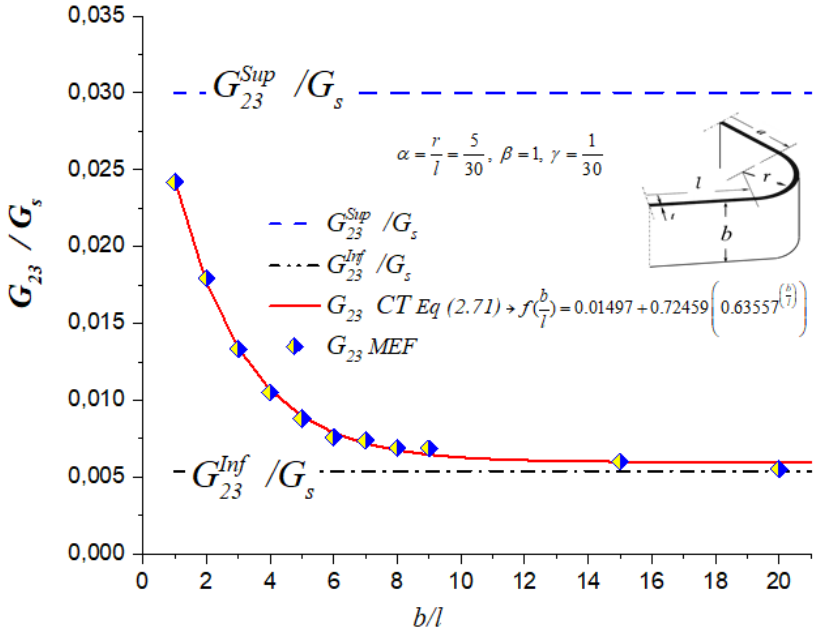
$$\begin{aligned} f(\frac{b}{l})\Big|_{r=0/30} &= 0.01462 + 1.22273\left(0.57519^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right) \\ f(\frac{b}{l})\Big|_{r=5/30} &= 0.01497 + 0.72459\left(0.63557^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right) \\ f(\frac{b}{l})\Big|_{r=10/30} &= 0.04232 + 1.09393\left(0.72426^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right) \end{aligned} \tag{2.71}$$

Alors que les limites supérieures et inférieures des modules du cisaillement sont exprimées d'une manière analytique, l'influence de l'épaisseur hors plan nécessite l'utilisation d'un système d'interpolation exponentielle.



(*a*)

$$G_{23}^{\alpha=0}=G_{23}^{lower}+\left[0.01462+1.22273\left(0.57519^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right)\right]\left(G_{23}^{Upper}-G_{23}^{lower}\right) \tag{2.72}$$



(*b*)

$$G_{23}^{\alpha=\frac{5}{30}}=G_{23}^{lower}+\left[0.01497+0.72459\left(0.63557^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right)\right]\left(G_{23}^{Upper}-G_{23}^{lower}\right) \tag{2.73}$$

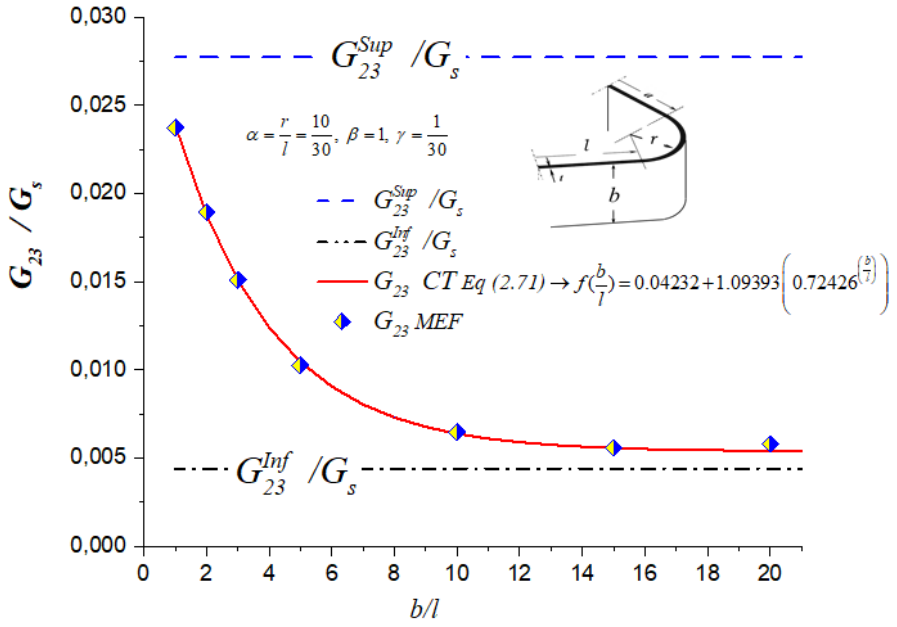


Fig. 2.27 (*c*)

$$G_{23}^{\alpha=\frac{10}{30}} = G_{23}^{lower} + \left[0.04232 + 1.09393\left(0.72426^{\left(\frac{b}{l}\right)}\right)\right]\left(G_{23}^{Upper} - G_{23}^{lower}\right) \tag{2.74}$$

Fig. 2.27 Module de cisaillement relatif G_{23} / Gs en fonction du rapport d'aspect b / l pour des différent valeur de α: a) $\alpha = r/l = 0$ b) $\alpha = r/l = 5/30$ c) $\alpha = r/l = 10/30$.

2.2.4.6 Variation du module d'élasticité hors plan E_3 / E_s en fonction des paramètres géométriques effectifs

La figure 2.28 montre la variation 3D du module de Young transversal non dimensionnel E_3/E_s qui peut représenter aussi la densité relative en fonction de la courbure relative $\alpha=r/l$ et l'angle interne de la cellule θ avec pour les des deux rapports β=1 et γ=0.05.

Le module E_3/E_s atteint son maximum lorsque les valeurs de α sont faibles pour des angles de cellule négatifs (entre -10 et -30), et il diminue avec l'augmentation de α. De plus, le module E_3/E_s des cellules auxétiques est plus sensible au rapport à la courbure.

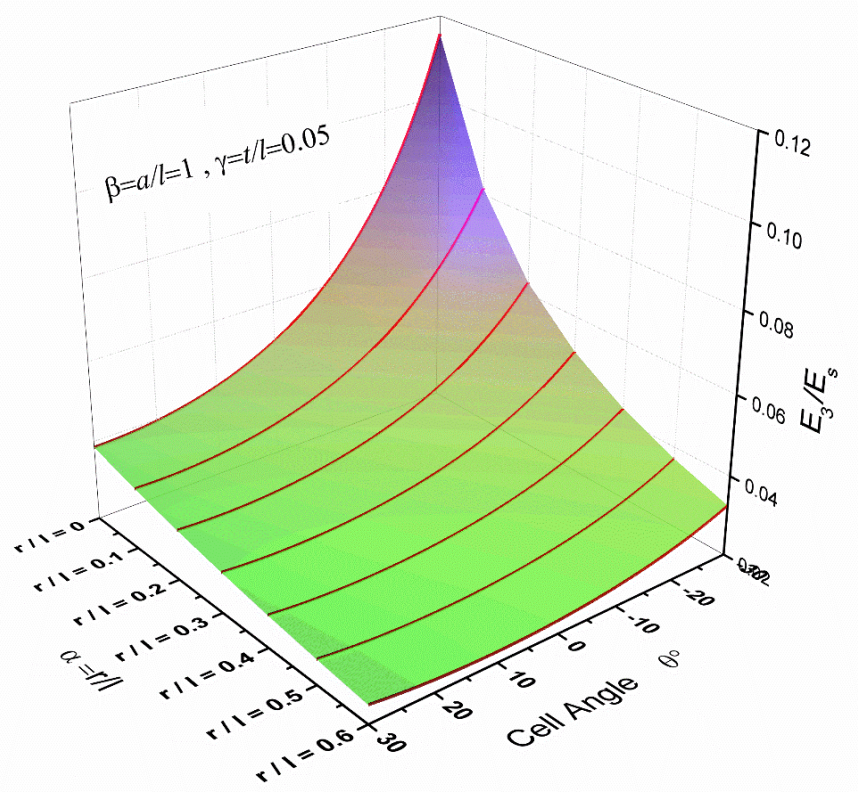
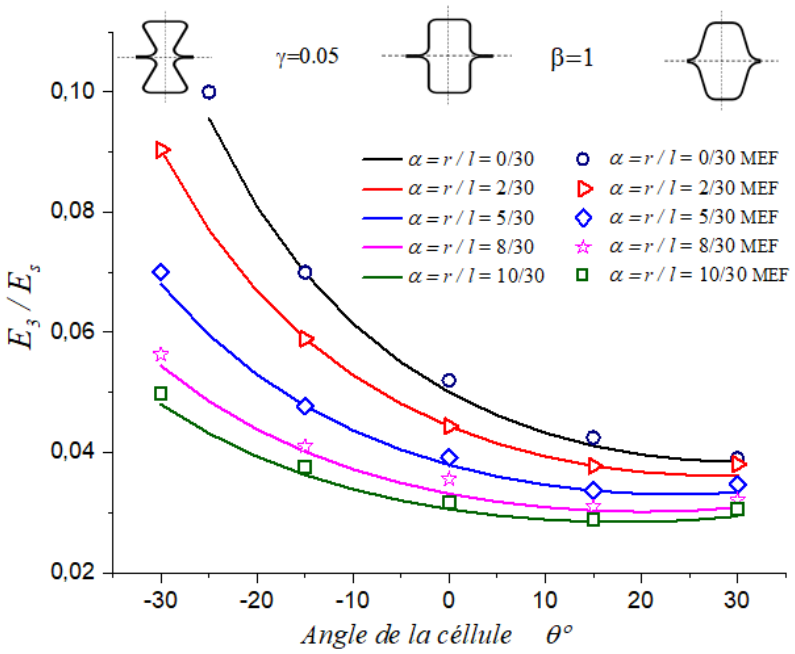


Fig. 2.28 Module de Young relatif E_3/E_s en fonction du rapport de courbure $\alpha = r / l$ et l'angle interne de la cellule θ, pour ($\beta = 1$, $\gamma = 1/30$).

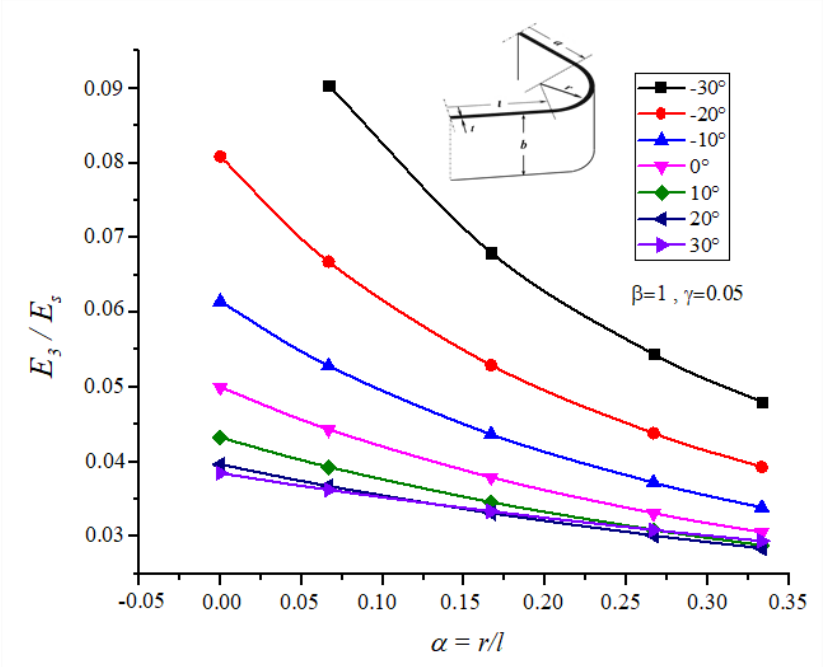
La figure 2.29 représente une comparaison entre les résultats analytiques (en ligne) et ceux obtenus par MEF (en points) de la variation du module effectif E_3/E_s en fonction de θ (figure 2.29-a) et r / l (figure 2.29-b) en fixant $\beta = a / l = 1$ et $\gamma = t / l = 0{,}05$. Le module d'élasticité hors plan E_3/E_s des cellules représente la densité relative, théoriquement ne dépend pas de la profondeur de la cellule.

Dans la partie d'angle de cellule négatif ($-30 < \theta < 0$ °), le module E_3/E_s diminué considérablement de 36% à 51% suivant les rapports r / l, tandis que pour $0 < \theta < +30$ ° la réduction n'est que de 5% à 31% (figure 2.29-a).

L'évolution de E_3/E_s par rapport à r / l est sous forme parabolique. Pour les courbes extrêmes, une baisse de E_3/E_s de l'ordre 46% est enregistrée lorsque $2/30 < r / l < 10/30$ pour $\theta = -30$ °, cette réduction n'est que d'environ 14% pour θ égal à + 30 ° (figure 2.29-b).



(*a*)



(*b*)

Fig. 2.29 L'évolution de E_3/E_s pour $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}05$ en fonction de :

a) Angle de cellule interne θ b) Rapports de courbure de cellule $\alpha = r / l$

2.2.4.7 L'effets du coefficient de poisson dans le plan ν_{12} sur les constants élastiques hors plan

La variation des modules hors plan G_{13} / G_s, G_{23} / G_s et E_3/E_s en fonction de θ sont de forme parabolique décente et leurs réductions respectives sont de 21,6, 48,5 et 37,7% pour $-30 < \theta < 0$ (figure 2.30). Pour $0 < \theta < +30$ ces réductions deviennent beaucoup plus faibles de l'ordre de 7,9% pour G_{13} / Gs, tandis que G_{23} / G_s et E_3 / E_s ont un comportement concave et atteignent leur minimum à $\theta =$ 12 ° et 19 ° avec des réductions de respectivement 7,3% et 8,0% puis elles augmentent de 12,5% et 2,9% pour + 30 °.

Pour θ <0 la géométrie de la cellule devient réentrante, le coefficient de Poisson ν_{12} devient négatif ce qui implique une forte augmentation des modules hors plan G_{13} / G_s, G_{23} / G_s et E_3 / E_s (figure 2.30).

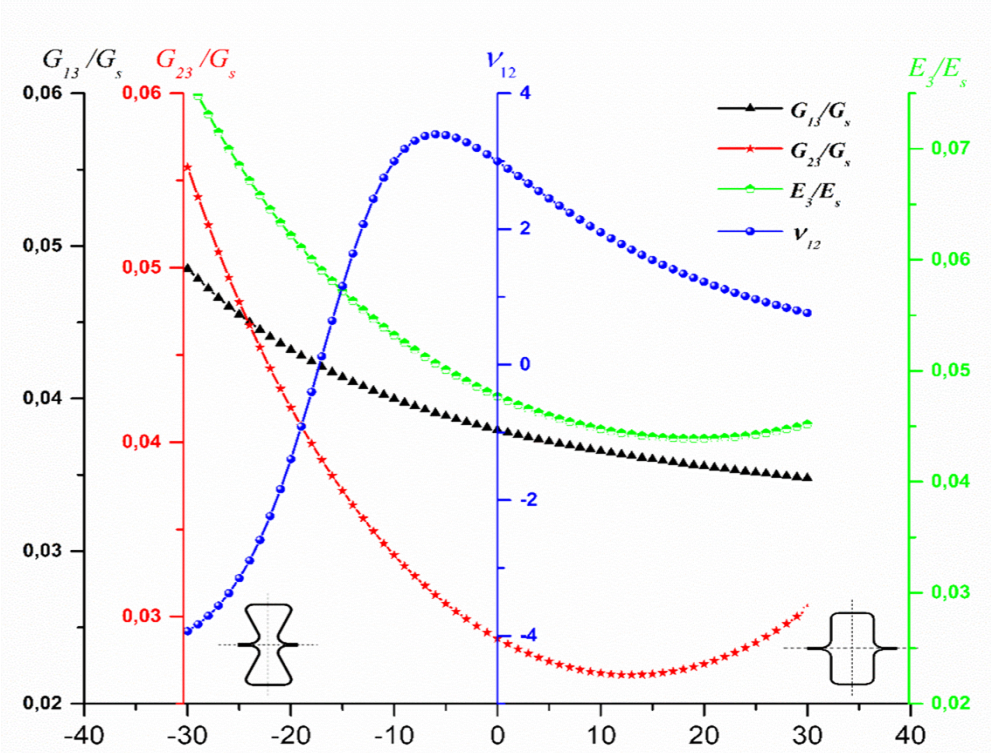


Fig. 2.30 Représentation multiaxes du module hors plan pour $\alpha = r / l = 0.3$

2.2.4.7 L'effet de la densité sur les limites inférieures et supérieures des modules de cisaillement hors plan

La figure 2.31 représente la variation du rapport du module de cisaillement sur la densité relative $(G_{i3}/G_s) / (\rho / \rho_s)$ en fonction des paramètres géométriques effectifs pour $(0 < r/l < 0.6)$

et (-30° < θ < 30°) pour les deux limites théoriques de la rigidité transversale équivalente $G^{Sup/Inf}$ de la cellule en nid d'abeille.

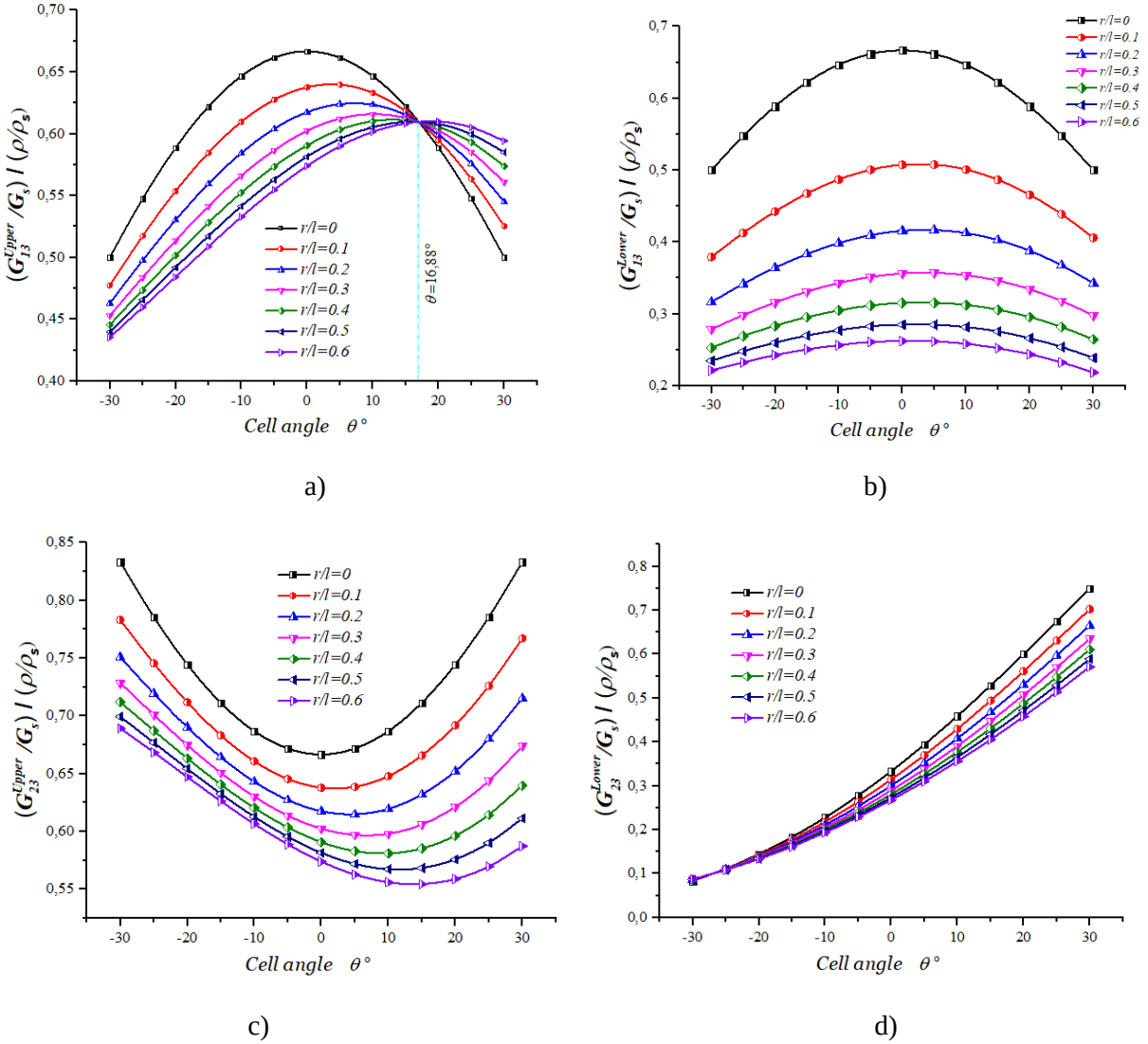


Fig. 2.31 La variation du rapport $(G_{ij}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ en fonction des paramètres géométriques effectifs

a) $(G_{13}^{Sup}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ *b*) $(G_{13}^{Inf}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$

c) $(G_{23}^{Sup}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ *d*) $(G_{23}^{Inf}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$

Le rapport $(G_{13}^{Sup}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ de la limite supérieure et inférieure montre une variation parabolique pour un maximum qui réside au niveau de la configuration hexagonale classique pour un angle $\theta = 0°$. les valeurs du rapport $(G_{13}^{Sup}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ diminues en augmentant le rapport *r/l* et convergent vers la valeur 0.61 pour un angle de cellule qui égale a $\theta = 16.88°$ pour toutes les configurations (figure 10-*a*). En plus, le comportent conventionnelle au niveau du rapport $(G_{13}^{Sup}/G_s)\ /\ (\rho\ /\ \rho_s)$ est le plus dominant au terme rigidité transversale autant que dans

la limite inférieure du rapport (G_{13}^{Inf}/G_s) / (ρ / ρ_s) ou le comportement auxétique et conventionnel sont presque égaux avec une différence de l'ordre 2% (figure 10-*b*).

Pour le rapport de la limite supérieure (G_{23}^{Sup}/G_s) / (ρ / ρ_s), la variation est parabolique descendante figure 10-*b*) ou les valeurs maximales du rapport (rigidité transversale / densité) se réside au comportement auxétique et l'augmentation du rapport de courbure *r/l* conduit vers une diminution du rapport (G_{23}^{Sup}/G_s) / (ρ / ρ_s).

2.2.5 Conclusion

La détermination des constants élastiques hors plan des nids-d'abeilles à parois courbées par le développement des modèles analytiques et numériques permet de tirer les conclusions suivantes.

- Les résultats numériques de cette étude confirment la validité de tous les modèles proposés pour le calcul des propriétés mécaniques hors plan des nids-d'abeilles courbés. Ces modèles peuvent être utilisés pour des analyses paramétriques et que sont également valables pour l'analyse des nids-d'abeilles commerciaux conventionnels en prenant une courbure nulle.

- Le module de cisaillement G_{13} est maximisé pour les angles de cellule négatifs θ, ces variations sont largement influencées par le rapport de la courbure *r/l* et la profondeur de la cellule *b/l*. Ceci est particulièrement avantageux pour les structures où un faible poids et une rigidité élevée sont recommandés.

- Pour une courbure relative (*r / l)* donnée, le module relatif G_{23} / Gs atteint son maximum pour les valeurs les plus faibles de la profondeur de la cellule.

- Le comportement auxétique maximise les modules relatifs G_{13} / Gs , E_3 / Es pour les différentes profondeurs relatives (*b/l*) de cellules.

- La prise en compte de la troisième direction dans le volume élémentaire représentatif en 3D permet de prendre en compte l'influence de la profondeur de la cellule en nid d'abeille sur les modules hors plan. En effet, le module relatif G_{23} / Gs diminue en fonction de la profondeur relative b / l et se stabilise au voisinage des valeurs de b / l supérieures à 10 surtout pour de cellules épaisses.

- Le comportement auxétique maximise le module relatif G_{23} / Gs pour des profondeurs relatives de cellules inférieur à 4 ($b < 4l$).

- Le module d'élasticité relatif E_3 / Es atteint son maximum pour de faibles valeurs de courbure relative α et pour des angles de cellule négatifs (entre -30 et -10), ce module représente le rapport de la densité relative ρ/ρ_S pour une configuration géométrique donnée de la cellule.

- Une diminution de 37 % dans le rapport relatif de la rigidité hors plan E_3 / Es pour la plage négative d'angles de cellule compris entre -30° et 0°, et pour de différentes profondeurs de la cellule. La diminution devient beaucoup plus faible pour les angles positifs de cellule.

- Pour les angles de cellule négatifs, et quand la courbure relative r / l croit de 2/30 à 10/30, une dégradation de 45% sur le rapport E_3 / Es a été trouvée.

- Pour un comportement auxétique, la géométrie de la cellule est généralement rentrante, le coefficient de Poisson est négatif. Cela entraine une forte augmentation de la rigidité hors plan E_3 et de cisaillement transverse hors plan.

- Pour les angles de cellule négatifs, et quand la courbure relative r / l croit de 2/30 à 10/30, une dégradation de 45% sur le rapport E_3 / Es a été trouvée.

- Pour un comportement auxétique, la géométrie de la cellule est généralement rentrante, le coefficient de Poisson est négatif. Cela entraine une forte augmentation de la rigidité hors plan E_3 et de cisaillement transverse hors plan.

- Pour les angles de cellule négatifs, et quand la courbure relative r / l croit de 2/30 à 10/30, une dégradation de 45% sur le rapport E_3 / Es a été trouvée.

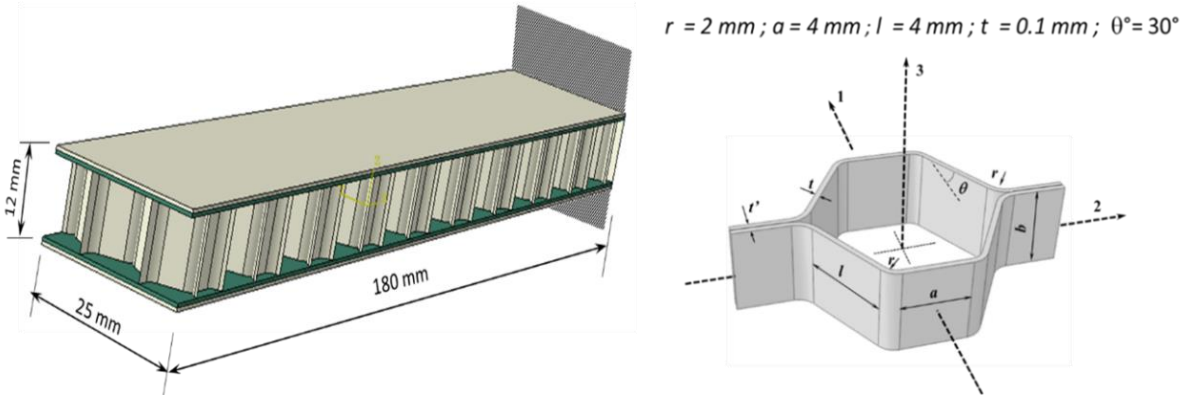
- Pour un comportement auxétique, la géométrie de la cellule est généralement rentrante, le coefficient de Poisson est négatif. Cela entraine une forte augmentation de la rigidité hors plan E_3 et de cisaillement transverse, mais aussi minimise la rigidité dans le plan. Le comportement devient anisotrope en cisaillement.

2.3 Validation des modules élastiques par une analyse dynamique

Dans les nombreuses applications, le cœur est pris comme un matériau orthotrope du fait de sa géométrie spécifique, il est assez difficile de caractériser son comportement mécanique.

Le calcul numérique permet d'avoir une première approche des réactions de matériaux un peu variables tels que le nid-d'abeilles qui ne se prête pas toujours à des modélisations analytiques simplifiées. Il est à remarquer que plusieurs modèles numériques sont nécessaires pour déterminer son comportement.

On se propose dans cette section d'effectuer une validation en dynamique des modules élastiques évalués par les expressions analytiques établies dans ce chapitre.



(a) (b)

Fig. 2.32 (a) Poutre console en cœur en nid-d'abeilles

(b) Détail et dimensions de la cellule unitaire du cœur

La validation est réalisée sur une poutre console en vibration forcé en utilisant les deux modèles du cœur suivants (figure 2.33) :

2.3.1 Modèle en nid-d'abeilles (original)

Le premier modèle est constitué d'une poutre sandwich en Aluminium de dimension (180x25x12 (mm)) composée de deux peaux d'épaisseur 1 mm et un cœur en nid-d'abeilles de 10 mm d'épaisseur. Le cœur contient 36 cellules nid-d'abeilles conventionnelles dont la cellule unitaire est représentée sur la figure 2.32(b)

2.3.2 Modèle équivalent homogénéisé

Dans le second modèle, le cœur de la poutre sandwich en nid-d'abeilles est remplacé par une couche homogène supposée orthotrope de dimension (180x25x10) mm. Les modules élastiqués

dans les différentes directions ont étés calculés et validés par une homogénéisation analytique et numérique montrée dans le chapitre 2 et représentés dans le tableau 2.4.

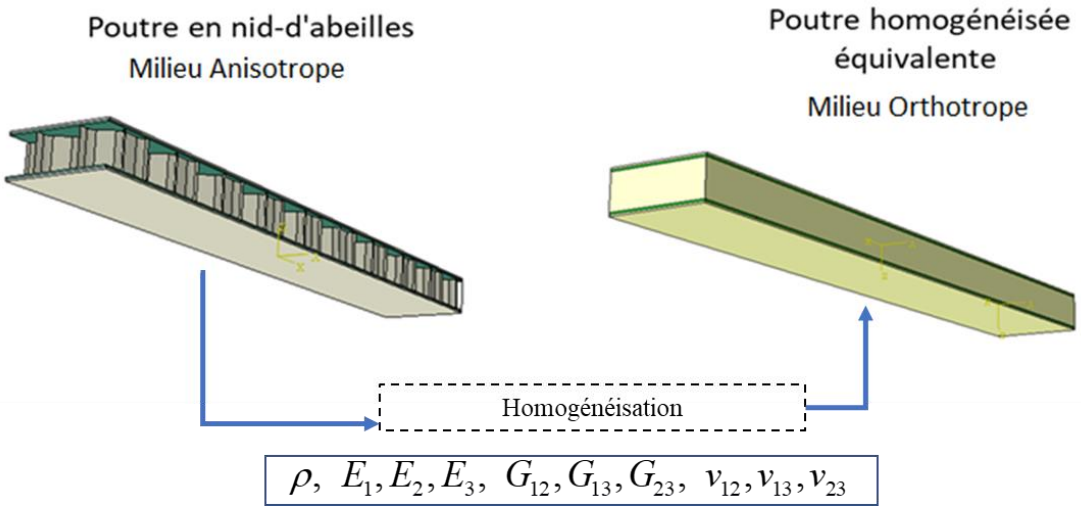


Fig. 2.33 Poutre en nid-d'abeilles et poutre homogénéisée équivalente

Les modules élastiques dans les différentes directions sont récapitulés sur le tableau 2.4.

Tab 2.4 les modules élastiqués dans les différentes directions (Homogénéisation analytique)

	ALUMINIUM E=7000 MPa, ν =0.3
E_1 (MPa)	0.0215
E_2 (MPa)	0.0358
E_3 (MPa)	137.8754
G_{12} (MPa)	0.0350
G_{13} (MPa)	281.2870
G_{23} (MPa)	291.2873
ν_{12}	0.7624
ν_{21}	1.2687
ρ (Kg/m^3)	53.18

2.3.3 Simulations Numériques

Plusieurs simulations numériques par éléments finis ont été réalisées pour calculer les 10 premiers modes de vibration en utilisant le code de calcul ABAQUS.

Dans le modèle en nid-d'abeilles, la géométrie et la répartition des clinquants et les différentes courbures des parois sont parfaitement représentées dans le volume de la poutre. Le cœur et les deux peaux ont été modélisés sur le code ABAQUS en utilisant 27370 éléments, répartis-en

18000 éléments solides linéaires à huit nœuds C3D8R dans les peaux et 9370 éléments coques à quatre nœuds S4R dans le cœur. Le modèle (peaux + cœur) est pris comme isotrope avec les caractéristiques mécaniques suivantes : E= 70000 MPa, ν=0.33.

Le cœur en nid-d'abeilles est pris comme un matériau orthotrope. Du fait de sa géométrie spécifique, il est assez difficile de caractériser son comportement mécanique. Le calcul numérique permet d'avoir une première approche des réactions de matériaux un peu variables tels que le nid-d'abeilles qui ne se prête pas toujours à des modélisations analytiques simplifiées. Il est à remarquer que plusieurs modèles numériques sont nécessaires pour déterminer son comportement.

Les éléments de volume sont des éléments tridimensionnels dont toutes les dimensions sont du même ordre de grandeur. La géométrie de ces éléments est explicitement décrite dans l'espace. Ce type d'élément est utilisé pour mailler les deux peaux et le cœur. Le modèle homogénéisé entier comprend 19440 éléments de volume répartis comme suit :

Le cœur est modélisé par 1440 éléments et les deux faces avec 18000 éléments solides linéaires à huit nœuds, C3D8R avec une intégration réduite. Dans ce modèle, le cœur est pris comme orthotrope et son comportement nécessite l'introduction de neuf modules d'élasticité évalués à partir de l'homogénéisation analytique (tableau 2.4).

La modélisation numérique par éléments finis nécessite l'étude de convergence du maillage afin de valider les résultats obtenus par approximation. Le modèle homogénéisé permet de définir un comportement mécanique choisi et de rendre compte des conditions aux limites et des divers cas de chargement imposés.

2.3.4 Résultats et discutions

Les résultats des diverses simulations sont montrés sur la figure 2.34 et résumés dans le tableau 2.5. Les résultats obtenus montrent un bon accord entre le modèle équivalent homogénéisé et les résultats du modèle en nid-d'abeilles, la différence des deux premières fréquences est inférieure à 0.5 % et inférieur à 1.4 % pour la dixième fréquence.

Les résultats du modèle équivalent présentés dans cette analyse sont obtenus avec une bonne précision.

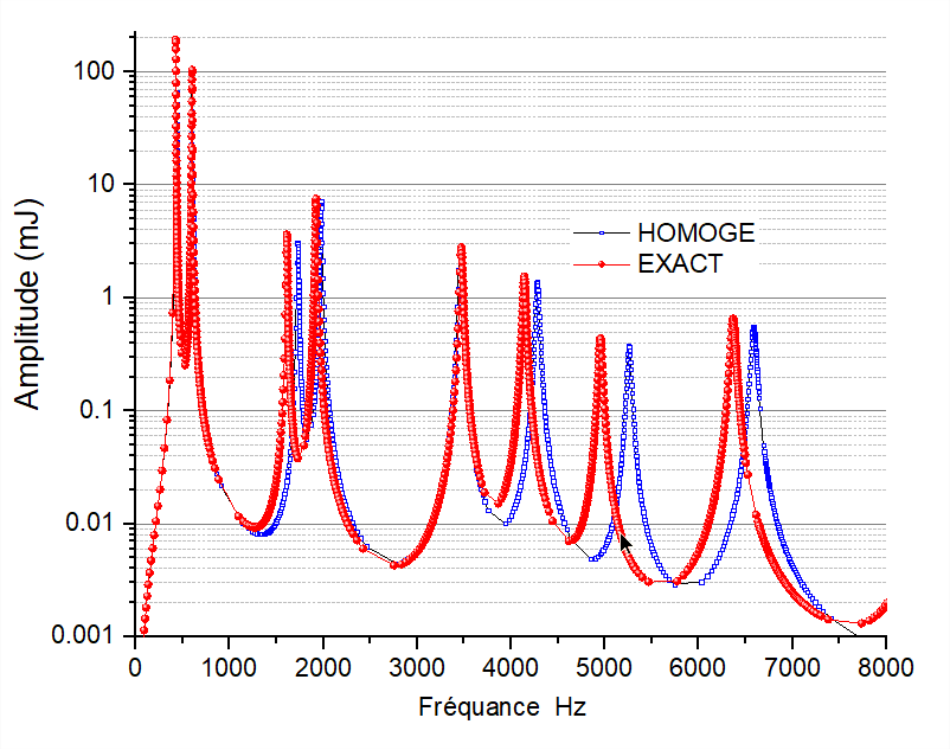


Fig. 2.34 Comparaison de la réponse en fréquences des huit premiers modes pour les deux modèles

Le tableau 2.5 montre la comparaison des dix premières fréquences modales obtenues par deux modèles développés. Les valeurs des dix premières fréquences sont très proches même pour les hautes fréquences. Un écart maximal de 6.979 % a été enregistré.

Tab 2.5 Comparaison des fréquences modales pour les deux modèles

Mode	Poutre en Nid-d'abeilles	Poutre Homogène Équivalente	Ecart en %
1	426.23	428.67	0.572
2	599.90	597.03	0.478
3	1610.22	1722.59	6.979
4	1922.66	1973.81	2.660
5	3470.28	3453.77	0.476
6	4141.80	4277.61	3.279
7	4953.78	5255.01	6.081
8	6366.86	6582.60	3.388
9	6775.69	6757.33	0.271
10	8429.51	8548.93	1.417

2.3.5 Conclusion

La comparaison entre les résultats des deux simulations montre que le modèle équivalent est bien adapté pour calculer les modes propres fréquences de différents types conceptions du cœur en nid d'abeilles. La différence maximale obtenue est inférieure à 0.5 % dans la première et ne dépasse pas 6% pour les dix premiers modes.

En effet, nous avons obtenu presque les mêmes fréquences modales pour les deux modèles. On peut conclure que les modules élastiques équivalents de la structure en nid-d'abeilles obtenue par l'homogénéisation analytique présentés dans les deux sections (2.1 et 2.2), **caractérisent parfaitement le comportement dynamique linéaire** de la structure originale en nid d'abeilles.

2.4 Références

[1] Gibson LJ, Ashby MF. Cellular solids structure and properties. 2nd ed. UK: Cambridge University Press; 1997.

[2] ALMUT POHL « Strengthened corrugated paper honeycomb for application in structural elements » PhD thesis of Sciences- Dipl.-Ing. Technische Universitat Wiene

[3] E. Harkati, N. Daoudi, and all. In-plane elasticity of a multi re-entrant auxetic honeycomb Composite Structures 180 (2017) 130–139

[4] E. Harkati, Nour El-Houda Daoudi, Chames Eddine Abaidia, Abderrezak Bezazi, and Fabrizio Scarpa "The Elastic Uniaxial Properties of a Center Symmetric Honeycomb with Curved Cell Walls: Effect of Density and Curvature " Physica status solidi-b Volume 254, Issue 12 December 2017.

[5] Bezazi A, Scarpa F, Remillat C. A novel centresymmetric honeycomb composite structure. Composite Structures 2005;71:356–64. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.09.035.

[6] A. Bezazi, C. Remillat, P. Innocenti, F. Scarpa. In-plane mechanical and thermal conductivity properties of a rectangular–hexagonal *honeycomb* structure. Composite Structures, Volume 84, Issue 3, July 2008, Pages 248-255.

[7] Silva MJ, Hayes WC, Gibson LJ. The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. Int J Mech Sci 1995;11:61–77.

[8] Grima JN, Cauchi R, Gatt R, Attard D. Honeycomb composites with auxetic out-of-plane characteristics. Compos Struct 2013;106:150–9.

[9] Körner C, Liebold-Ribeiro Y. A systematic approach to identify cellular auxetic materials. Smart Mater Struct 2015;24:025013.

[10] Evans KE, Nkansa MA, Hutchinson IJ, Rogers SC. Molecular network design. Nature 1991;353:124 [9] Sun Y, Pugno NM. In plane stiffness of multifunctional hierarchical honeycombs with negative Poisson's ratio sub-structures. Compos Struct 2013;106:681–9.

[11] Whitty JPM, Alderson A, Myler P, Kandola B. Towards the design of sandwich panel composites with enhanced mechanical and thermal properties by variation of the in-plane Poisson's ratios. Compos Part A 2003;34:525–34.

[12] Pozniak AA, Kaminski H, Kedziora P, Maruszewski B, Strek T, Wojciechowski KW. Anomalous deformation of auxetic constrained square. Rev Adv Mater Sci 2010;23(2):169–74.

[13] Lin TC, Yang MY, Huang JS. Effects of solid distribution on the out-of-plane elastic properties of hexagonal honeycombs. Composite Structures 2013;100:436–42. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.01.007.

[14] Lakes RS. Foam structures with a negative Poisson's ratio. Science 1987;235:1038-40.

[15] Almgren RF. An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio=-1. J Elast 1985;15:427–30.

[16] Lira C, Innocenti P, Scarpa F. Transverse elastic shear of auxetic multi re-entrant honeycombs. Composite Structures 2009;90:314–22 https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.03.009.

[17] Scarpa F, Tomlin PJ. On the transverse shear modulus of negative Poisson's ratio honeycomb structures. Fatigue Fract Eng Mater Struct 2000;23:717–20.

[18] Nkansah ME, Evans KE, Hutchinson IJ. Modelling the mechanical properties of an auxetic-molecular network. Model Simul Mater Sci Eng 1994;2:337.

[19] Gibson LJ, Ashby MF, Zhang J, Triantafillou TC. Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads- I. Modelling. Int J Mech Sci 1989;31 (9):635–63

[20] Masters and Evans. Models for the elastic deformation of honeycombs. Compos Strut 1996;35:403–22.

[21] Sajad Arabnejad, Damiano Pasini : Mechanical properties of lattice materials via asymptotic homogenization and comparison with alternative homogenization methods. International Journal of Mechanical Sciences Volume 77, December 2013, Pages 249-262.

[22] C. Lira, F. Scarpa, Y.H. Tai, J.R. Yates « Transverse shear modulus of SILICOMB cellular structures » Composites Science and technology 71 (2011) 1236-1241.

[23] S. Balawi, J.L. Abot, "A refined model for the effective in-plane elastic moduli of hexagonal honeycombs", journal of Composite Structures 84 (2008) 147–158

[24] Sardar Malek, Lorna Gibson: Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs. Mechanics of Materials, Volume 91, Part 1, December 2015, Pages 226-240.

[25] ABAQUS, version CEA 6.10-1 reference manuals- Dassault Systeme Providence ,R.I: Abaqus Inc.,2010.

[26] L. Al Bâchi, Modélisation numérique et expérimentale du comportement des matériaux sandwiches appliqués à l'aéronautique, Thèse de l'ENI de Tarbes, 2002.

[27] Chamis C C., R. A. Aiello, L.N. Murthy, "Fiber composite sandwich thermo structural behaviour: Computational simulation", Journal of composite technology & research 1988, vol. 10, pp. 93-99.

[28] Jorg Hohe, Wilfried Becker. Effective mechanical behavior of hyperelastic honeycombs and two-dimensional model foams at finite strain : International Journal of Mechanical Sciences, Volume 45, Issue 5, May 2003, Pages 891-913

[29] H. Jopek, T. Strek,. Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase Phys Status Solidi B 2015, 252, 1551.issue7.

[30] L. J. Gibson, Michael Farries Ashby, G. S. Schajer and C. I. Robertson. The mechanics of two-dimensional cellular materials. Proceedings of the Royal

Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, A382, 1982, Pages 25-42.

[31] F.K. Abd El-Sayed, R. Jones and I.W. Burgess. A theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite materials. Composites, Volume 10, Issue 4, October 1979, Pages 209-214.

[32] Kolpakov, A. G., 1985. Determination of the average characteristics of elastic frameworks. Prikl. Matem. Mekhan. 49(6), pages 969-977.

[33] Bitzer,T.N. Honeycomb Technology Materials, Design, Manufacturing, Applications and Testing.Springer, 1997, page 233

[34] Penzien J and Didriksson, T. Effective shear modulus of honeycomb cellular structure. AIAA Journal Vol 2 (3), 1964, pages 531-535.

[35] C.E.S. Ueng, E.E. Underwood, T.L. Liu. Shear modulus of superplastically formed sandwich cores☆. Computers & Structures, Volume 10, Issues 1–2, April 1979, Pages 393-397.

[36] S. Kelsey, R. Gellatly, and B. Clark, "The shear modulus of foil honeycomb cores," Aircraft Engineering, vol. 30, pp. 294–302, 1958.

[37] Ting-Chun Lin, Mei-Yi Yang, Jong-Shin Huang « Effects of solid distribution on the out-of-plane elastic properties of hexagonal honeycombs » Composite Structures 100 (2013) 436-442.

[38] J. Zhang and M. and F. Ashby. Out-of-plane properties of honeycomb slane properties «Int. J. Mech. Sci. Vol. 34, No. 6, pp. 475~189, 1992

[39] Gong X, Huang J, Scarpa F., Liu Y. and Leng J. « Zero Poisson's Ratio Cellular Structure for Two-Dimensional Morphing Applications » Composite Structures 134, 384-392 (2015).

[40] F., Cote, V. S. Deshpande and N. A. Fleck. The shear response of metallic square honeycombs. Journal of mechanics of materials and structures, Vol. 1, No. 7, pp1281-1299, 2006.

[41] M. Grediac. A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores. Int. J. Solids Structures. Volume 30, Issue 13, p 1777-1788, 1993.

[42] F. Scarpa, F. C. Smith and B. Chambers « Mechanical and electromagnetic behaviour of auxetic honeycomb structures » THE AERONAUTICAL JOURNAL MARCH -Paper No. 2774. -2 January 2003.

[43] A. Kolla, J. Ju, J. D. Summers, G. Fadel, J. C. Ziegert. Design of chiral honeycomb meso-structures for high shear flexure. Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2010 August 15-18, 2010, Montreal, Quebec, Canada.

[44] S.J.K. Florence, Renji K., Subramanian, K. «Modal Density of Honeycomb Sandwich composite Cylindrical Shells Considering Transverse Shear Deformation » International journal of Acoustics & Vibration, Vol. 23, No. 1, 2018 (pp. 83_92).

[45] C. W. Schwingshackl; G. S. Aglietti; and P. R. Cunningham « Determination of Honeycomb Material Properties: Existing Theories and an Alternative Dynamic Approach. J. Aerosp. Eng., 2006, 19(3): 177-183.

[46] A. Lorato, P. Innocenti, et al. The transverse elastic properties of chiral honeycombs. Composites Science and Technology 70 (2010) 1057–1063.

[47] Stefan S, Marin S, Dan M, Adriana G. « On the evaluation of mechanical properties of honeycombs by using finite element analyses « INCAS BULLETIN, Volume 7, Issue 3/ 2015, pp. 135-150 ISSN 2066 – 8201.

[48] Guangyu S. Pin. T 'Equivalent transverse shear stiffness of honeycomb cores, Int. J. Solids Structures Vol. 32, No. 10, pp. 1383-1393, 1995.

[49] Torquato, S., Gibiansky, L.V., Silva, M.J., and Gibson, L.J., "Effective mechanical and transport properties of cellular solids," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 40, No. 1, 1998, pp. 71 – 82.

[50] Harkati A., Boutagouga D., Harkati E., Bezazi A., Scarpa F., Ouisse M. In-plane elastic constants of a new curved cell walls honeycomb concept Author links open overlay panel. Thin-Walled Structures Volume 149, April 2020, 106613.

[51] Becker, W., "Closed-form analysis of the thickness effect of regular honeycomb core materials," Composite Structures, Vol. 48, No. 1 - 3, 2000, pp. 67 - 70

[52] Qiao, P., Fan, W., Davalos, J.F. and Zou, G., "Optimization of transverse shear moduli for composite honeycomb cores," Composite Structures, Vol. 85, No. 3, 2008, pp. 265 - 274

[53] H. Qaiser, and R. Ata -Transverse Shear Behavior of A Nomex Core for Sandwich Panels- Mechanics of Composite Materials, Vol. 50, No. 6, January, 2015

[54] Xu, X.F., Qiao, P. and Davalos, J.F., "Transverse shear stiffness of composite honeycomb core with general configuration," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 127, No. 11, 2001, pp. 1144 – 1151.

[55] Meraghni, F., Desrumaux, F. and Benzeggagh, M.L., "Mechanical behavior of cellular core for structural sandwich panels, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 30, No. 6, 1999, pp. 767 – 779.

[56] Pan, SD., Wu, LZ. and Sun, YG. Transverse shear modulus and strength of honeycomb cores, Composite Structures 84 (2008) 369-374.

[57] Hohe, J. and Becker, W., "An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores," Composites Part B-Engineering, Vol. 32, No. 3, 2001, pp. 185 – 197.